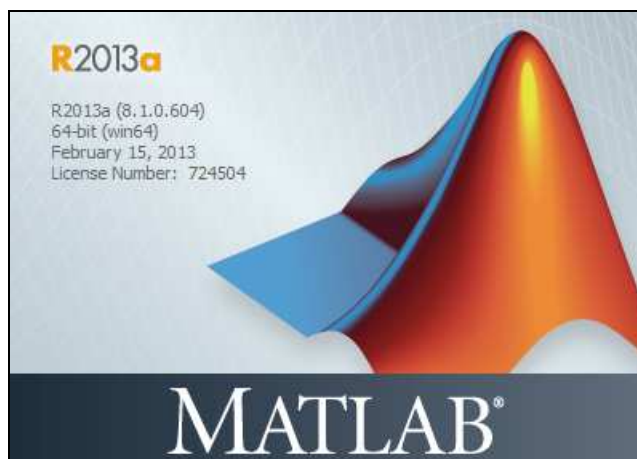


ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Το MATLAB
στα Ανώτερα-Εφαρμοσμένα Μαθηματικά



Οι βασικές έννοιες και υπολογιστικές διαδικασίες των μαθημάτων, Μαθηματικά - I - II - III με χρήση του λογισμικού MATLAB

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Συγγραφείς

Δρ. Θεοδώρου Ιωάννης, Τακτικός Καθηγητής
Δρ. Κεχρινιώτης Αριστείδης, Επιστημονικός Συνεργάτης
Δρ. Τριανταφύλλου Χρυσανγή, Επιστημονικός Συνεργάτης

Αναθεωρημένη έκδοση (Λαμία, Σεπτέμβρης 2014)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Εφαρμογές του MATLAB στα Ανώτερα Μαθηματικά

(σύμφωνα και με τα αντίστοιχα Μαθήματα Θεωρίας: Μαθηματικά I, II, III)

Γενικά περί MATLAB

Το MATLAB είναι ένα από τα χρησιμότερα επιστημονικά, υπολογιστικά και γραφιστικά προγράμματα-λογισμικά πακέτα, που χρησιμοποιείται σήμερα διεθνώς και ευρέως τόσο στα Μαθηματικά και στις άλλες Θετικές Επιστήμες, όσο και στην Τεχνολογία γενικότερα. Το MATLAB μπορεί να χρησιμοποιηθεί από πολλά είδη και μεγέθους computers, από personal μέχρι super-computers. Ελέγχεται μέσω εκατοντάδων προκαθορισμένων εντολών και συναρτήσεων-αλγόριθμων, αλλά μπορεί να επεκταθεί και να προγραμματιστεί και με επιπλέον ειδικές εντολές ή άλλους κατάλληλους αλγόριθμους.

Οι υπολογιστικές και γραφιστικές ικανότητες του MATLAB καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα πεδίων εφαρμογής, όπως: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Στατιστική, Γραμμική ή Διανυσματική Άλγεβρα, Αριθμητική Ανάλυση, Ανάλυση Σημάτων-Συστημάτων, Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος, Συστήματα Ελέγχου, Ασαφής Λογική, Νευρωνικά Δίκτυα, Φυσική, Οικονομία, Βιολογία, Χημεία, Βιομηχανία, κ.λπ. Υπάρχουν γενικά περί τις 30 βασικές εργαλειοθήκες-υποπρογράμματα (Toolbox) του MATLAB που καλύπτουν ειδικά πεδία εφαρμογών της Επιστήμης και της Τεχνολογίας. Μπορεί να υπολογίσει με μια μόνο εντολή π.χ. τη λύση ενός συστήματος ή μιας διαφορικής εξίσωσης, να κάνει σύνθετες πράξεις πινάκων, να υπολογίσει ολοκληρώματα, παραγώγους, ή εμβαδά, να δώσει δισδιάστατα και τρισδιάστατα γραφήματα, να επεξεργαστεί σήματα και συστήματα, να κάνει στατιστικές αναλύσεις, κ.λπ.

Το MATLAB, είναι ένα από τα δυναμικότερα σύγχρονα υπολογιστικά "εργαλεία"- μεταξύ άλλων αντίστοιχων (όπως το *Mathematica*, *Maple*, *Derive*, κ.λπ.), και βασίζει τη λειτουργία του στους πίνακες (μήτρες) απ' όπου και η ονομασία του (*MATLAB-MATrix LABoratory*, δηλ. *Εργαστήριο Πινάκων*). Οι πίνακες (που εκφράζουν και διανυσματικές διαδικασίες) είναι πράγματι από τις χρησιμότερες έννοιες-εργαλεία, τόσο για θεωρητικά όσο και για πρακτικά θέματα των μαθηματικών. Η ευρεία χρήση των πινάκων έχει άμεση εφαρμογή στη σύγχρονη εκτέλεση των "*διανυσματικοποιημένων πινάκων-vectorized computer algorithms*".

Η διεθνής έκδοση "*student edition MATLAB*", με την οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, δημιουργήθηκε για πρώτη φορά το 1970, στα Πανεπιστήμια "Stanford" και "New Mexico" των ΗΠΑ, κύρια για τις ανάγκες των σπουδαστών στα μαθήματα "Θεωρία Πινάκων", "Γραμμική Άλγεβρα" και "Αριθμητική Ανάλυση". Η εν λόγω "*έκδοση σπουδαστή MATLAB*", είναι μια κατάλληλη περικοπή της αντίστοιχης σύγχρονης επαγγελματικής έκδοσης (που περιλαμβάνει βέβαια ένα πολύ ευρύτερο υπολογιστικό φάσμα).

Σκοπός των επόμενων *10 Εργαστηριακών Μαθημάτων* (και 2 επαναληπτικών) είναι να εξετάσουμε με ποιον ακριβώς τρόπο χρησιμοποιούμε το MATLAB, προκειμένου να εκτελούμε τις διάφορες πράξεις και τις υπολογιστικές διαδικασίες των Ανώτερων-Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, αναφορικά με τις βασικές έννοιες που γνωρίζουμε ήδη από τη Θεωρία των μαθημάτων *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I, II* και *III*. Έτσι, ξεκινώντας από απλά μαθηματικά σύμβολα, θα δούμε τις διάφορες πράξεις και υπολογιστικές διαδικασίες των βασικών συναρτήσεων, των πινάκων και των μιγαδικών, καθώς και τα γραφήματά τους, την επίλυση εξισώσεων και συστημάτων, πώς υπολογίζουμε παραγώγους, ολοκληρώματα και εμβαδά ή όγκους, τη λύση διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών, καταλήγοντας στις εφαρμογές των Γραμμικών Μετασχηματισμών Laplace, Fourier, και Ζήτα, που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία αναλογικών ή ψηφιακών LTI Σημάτων-Συστημάτων (όπως αυτά εκφράζονται μέσω των αντίστοιχων μαθηματικών μοντέλων, δηλ. των Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων ή Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (Εργαστήριο Μαθηματικών)

ΜΑΘΗΜΑ 1^ο

Εισαγωγή στο MATLAB (Βασικές εντολές, συμβολισμοί και μαθηματικές πράξεις).

ΜΑΘΗΜΑ 2^ο

Βασικές συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις τους (τριγωνομετρικές, εκθετικές, υπερβολικές, και οι αντίστροφές τους). Πολυώνυμα (ρίζες, τιμές, κτλ).

ΜΑΘΗΜΑ 3^ο

Πίνακες (Πράξεις, ανάστροφος, αντίστροφος, ορίζουσα, ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα, κτλ). Επίλυση Εξισώσεων και Συστημάτων (γραμμικών και μη).

ΜΑΘΗΜΑ 4^ο

Μιγαδικοί αριθμοί (Πράξεις, μέτρο, όρισμα, μορφές, ρίζες, κλπ), Ανάπτυγμα σε Σειρές Taylor-MacLaurin (σχέσεις τριγωνομετρικών-εκθετικών συναρτήσεων, τύποι Euler, κλπ).

ΜΑΘΗΜΑ 5^ο

Υπολογισμός: Παράγωγοι (1^{ης} και ανώτερης τάξης, μερικές παράγωγοι, κτλ), Ολοκληρώματα (διπλά-τριπλά, εμβαδά, κτλ), Λύση βασικών Διαφορικών Εξισώσεων.

ΜΑΘΗΜΑ 6^ο

Γραφήματα (Γραφικές παραστάσεις των προαναφερόμενων εννοιών, αναλυτικά δισδιάστατα και τρισδιάστατα γραφήματα).

ΜΑΘΗΜΑ 7^ο

Υπολογισμός: Μετασχηματισμός Laplace (ML), αντίστροφος ML, Λύση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων μέσω του ML, Εφαρμογές σε LTI αναλογικά συστήματα.

ΜΑΘΗΜΑ 8^ο

Υπολογισμός: Μετασχηματισμός Fourier (MF), αντίστροφος MF, Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier, Λύση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων μέσω του MF, Εφαρμογές σε LTI αναλογικά συστήματα.

ΜΑΘΗΜΑ 9^ο

Υπολογισμός: Μετασχηματισμός Ζήτα (MZ), αντίστροφος MZ, Λύση Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών μέσω του MZ, Εφαρμογές σε LTI ψηφιακά συστήματα.

ΜΑΘΗΜΑ 10^ο

Ανάλυση χρονοδιακριτών (ψηφιακών) και χρονοσυνεχών (αναλογικών) LTI Συστημάτων: a) στο πεδίο του χρόνου, και b) στο πεδίο της συχνότητας.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ (11^ο και 12^ο)

Σύντομη Επανάληψη-Σύνοψη όλων των προηγούμενων μαθημάτων, (όλων των βασικών μαθηματικών πράξεων και εντολών).

ΜΑΘΗΜΑ 1^ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ στο MATLAB

Βασικές εντολές, συναρτήσεις και μαθηματικές πράξεις

Μαθηματικά	MATLAB	παρατηρήσεις
πρόσθεση, $a+\beta$	$a+\beta$	π.χ. $7+9,5=7+9.5$
αφαίρεση, $a-\beta$	$a-\beta$	π.χ. $31,2-12,4=31.2-12.4$
πολλαπλασιασμός, $a\cdot\beta$	$a*\beta$	π.χ. $4x5=4*5$
διαίρεση, a/β	a/β	π.χ. $8:3=8/3$
δύναμη, a^β	$a^\wedge\beta$	π.χ. $2^5=2^\wedge5$
e^x , $e=2,7182$ =βάση νεπερ. λογ.	exp(x)	π.χ. $e^{-3} = \exp(-3)$
$\ln x$	log(x)	νεπέρειος λογάριθμος
$\log_a x$	loga(x)	λογάριθμος με βάση a
\sqrt{x} , $\sqrt[n]{x^n}$	sqrt(x) , $x^\wedge(n/a)$	ρίζες, π.χ. $\sqrt[3]{4^5} = 4^\wedge(5/3)$
$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$	sin(x) , cos(x) , tan(x) , cot(x)	τριγωνομετρ. συναρ. (x σε ακτίνια)
$\arcsin x$ ($\sin^{-1}x$), $\arccos x$ ($\cos^{-1}x$), $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$	asin(x) , acos(x) , atan(x) , acot(x)	αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
$\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\operatorname{coth}(x)$	sinh(x) , cosh(x) , tanh(x) , coth(x)	υπερβολικές συναρτήσεις
$\operatorname{asinh}(x)$, $\operatorname{acosh}(x)$, $\operatorname{atanh}(x)$, $\operatorname{acoth}(x)$	asinh(x) , acosh(x) , atanh(x) , acoth(x)	αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις
$ x $	abs(x)	απόλυτη τιμή ή μέτρο του μιγαδικού αριθμού x
$\operatorname{Arg}(x) = \angle x$	angle(x)	πρωτεύον όρισμα μιγαδικού x
$\operatorname{Re}(x)$	real(x)	πραγμ. μέρος μιγαδικού x
$\operatorname{Im}(x)$	imag(x)	φανταστ. μέρος μιγαδικού x
\bar{x}	conj(x)	ο συζυγής του μιγαδικού x
ΜΚΔ(x,y)	gcd(x,y)	Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των ακεραίων x και y
ΕΚΠ(x,y)	lcm(x,y)	Ελάχιστο Κοινό Πολ/σιο των ακεραίων x και y
$\pi=3,14\dots$	rem(x,y)	Υπόλοιπο της διαίρεσης x/y
i, j	pi	
	i, j	$i=j=\sqrt{-1}$ =φαντ. μονάδα
	inf	το άπειρο (π.χ. 1/0)
	nan	μη αριθμός (not-a-number), π.χ. 0/0
	ans	η απάντηση (answer)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται με τελεία και όχι με κόμμα στη θέση της υποδιαστολής π.χ. 0.17 και όχι $0,17$.
- Γράφουμε γενικά με λατινικά-αγγλικά γράμματα (αποφεύγοντας τα ελληνικά).
- Οι πολύ μεγάλοι και οι πολύ μικροί αριθμοί δίνονται τυποποιημένα ως εξής:
 $324^{13} = 324^\wedge13 = 4.3360e+032$, (που σημαίνει $324^\wedge13 = 4,3360x10^{32}$),
 $1050^{20} = 1050^\wedge20 = 2.6533e+060$ (δηλ. $1050^{20} = 2,6533x10^{60}$),
 $3^{-27} = 3^\wedge-27 = 1.3114e-013 = 1,3114x10^{-13}$.
- Οι γωνίες γράφονται μόνο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες.

- Με την εντολή **format** καθορίζουμε τον τρόπο εμφάνισης των δεκαδικών αριθμών.
format short: Οι αριθμοί δίνονται με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων.
format long: Οι αριθμοί δίνονται με προσέγγιση 15 δεκαδικών ψηφίων.
- Το MATLAB υπολογίζει τον γνωστό άρρητο-υπερβατικό αριθμό π ως εξής:
 $\pi = 4 * \text{atan}(1) = \text{imag}(\log(-1)) = 3.1415926535897\dots$ (γιατί);
- Με την εντολή **who** το MATLAB μας δείχνει τις μεταβλητές που έχουμε ορίσει και ισχύουν μέχρι τώρα, ενώ με την εντολή **clear** καθαρίζει από την μνήμη [σβήνει] τις μεταβλητές που έχουμε ορίσει.
- Το MATLAB αποθηκεύει τις εντολές που εκτελέστηκαν σε ένα τμήμα του χώρου εργασίας. Με τα πλήκτρα \uparrow, \downarrow μπορούμε να επαναφέρουμε μια εντολή που εκτελέστηκε πριν. Μετά, με τα πλήκτρα \leftarrow, \rightarrow μπορούμε να μετακινηθούμε στη γραμμή και να τροποποιήσουμε την εντολή χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα πλήκτρα.
- Ποτέ δεν γράφουμε μια συνάρτηση στη μορφή: $y(x) = \sin(2*x)$ ή $h(x) = \cos(10*\pi*t)$ γιατί το πρόγραμμα υποδεικνύει λάθος, γράφουμε: $y = \sin(2*x)$ ή $h = \cos(10*\pi*t)$
- Τα ονόματα των μεταβλητών αρχίζουν πάντα από λατινικό γράμμα, που μπορεί να ακολουθείται από άλλα γράμματα ή αριθμούς (μέχρι 31 χαρακτήρες): $x, y1, xYz, f2, \dots$
- Μια συμβολική μαθηματική παράσταση π.χ. μια συνάρτηση $f(x,y)=3x^2+5xy^3$, γράφεται στο MATLAB ως εξής:

```
syms x y % σύμβολα x,y, μετά πάτησε Enter
f=3*x^2+5*x*y^3 % μετά γράψε pretty(f), ή simplify(f), κτλ.
```

(Με το σύμβολο % γράφονται οι Σημειώσεις ή τα Σχόλια που ακολουθούν μια εντολή, που δεν «διαβάζονται» από το MATLAB).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογιστούν με προσέγγιση 15 δεκαδικών ψηφίων οι παραστάσεις:

$$A = 2^7 - 15 \left(\frac{7}{4} \right)^3 + \frac{7 + \frac{1}{2^{-5}}}{6(3^{-4} - 8^3)}, \quad B = (-2, 4)^7 - \sqrt{1,3 \left(\frac{5,8}{3,2} \right)^{-3}} + \frac{5(8,5 + 3^5)}{6,4(2^{12} + 7^{-5})},$$

$$C = 3\pi e - \sqrt{e} \ln \frac{3}{4} + \sqrt[3]{e^4} + \sqrt[3]{5^4}, \quad D = \ln 81 + \log 100 - \sqrt{2} \log_2 2 + \ln(-15),$$

2) Να υπολογιστούν με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων, οι παραστάσεις:

$$A = 3e^{\frac{-2}{3}} + \tan \sqrt[3]{5^4} + \sqrt[3]{e} \cos \frac{\pi}{4} - 2 \left| \arcsin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right| - 4 \arccos(7) - 3 \operatorname{arccosh}(7),$$

$$B = 8\pi e^2 \left[\ln \frac{5}{6} + \sqrt[5]{e^{-2}} + \sqrt[3]{\tan(-1)} - 2\pi \left| \sin(-3) \right| - \frac{\pi}{2} \operatorname{arccot}(5) - 2\sqrt{3} \operatorname{arccoth}(5) \right].$$

3) Να υπολογιστούν οι πραγματικές συναρτήσεις, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g , καθώς και το πεδίο ορισμού αυτών, όταν είναι:

a) $f(x) = \frac{5x^3 - 2x + 1}{x}$ και $g(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$.

b) $f(x) = e^{-3x} + \sqrt{2x + 4}$ και $g(x) = 3 \ln(x^2) - \frac{2\sqrt{3x-1}}{x^2 - 1}$.

c) $f(x,y) = \sin(x + y) + \sin(x - y)$ και $g(x,y) = \cos(x + y) - \cos(x - y)$.

ΜΑΘΗΜΑ 2^ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ, ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ, ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ, και οι αντίστροφές τους

A) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ (ή Κυκλικές) Συναρτήσεις

$\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\omicron$ $\sin(t): t \in \mathbf{R} \rightarrow [-1,1]$ $\epsilon\phi\alpha\pi\tau\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ $\tan(t): t \in \mathbf{R} - [k\pi + \pi/2, k \in \mathbf{Z}] \rightarrow \mathbf{R}$
 $\sigma\upsilon\eta\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\omicron$ $\cos(t): t \in \mathbf{R} \rightarrow [-1,1]$ $\sigma\upsilon\nu\epsilon\phi\alpha\pi\tau\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ $\cot(t): t \in \mathbf{R} - [k\pi, k \in \mathbf{Z}] \rightarrow \mathbf{R}$

Γράφημα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων: Για να σχεδιάσουμε γενικά μια συνάρτηση θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε το πεδίο ορισμού της. Το πεδίο ορισμού σχεδίασης είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Το πεδίο ορισμού σχεδίασης συναρτήσεων ορίζεται στο MATLAB με δυο τρόπους:

- $\mathbf{x = v_1 : \kappa : v_2}$ % ορίζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τον αριθμό v_1 έως τον αριθμό v_2 με βήμα κ . Το κ παίρνει συνήθως τιμές: 0.1 ή 0.01 ή 0.001. (Με % συμβολίζεται η Σημείωση-Σχόλια).
- $\mathbf{x = linspace(v_1, v_2, n)}$ % ορίζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τον αριθμό v_1 έως τον αριθμό v_2 παίρνοντας n τιμές από τον αριθμό v_1 έως τον αριθμό v_2 . Το n παίρνει τιμές: 100 ή 200 ή 500.

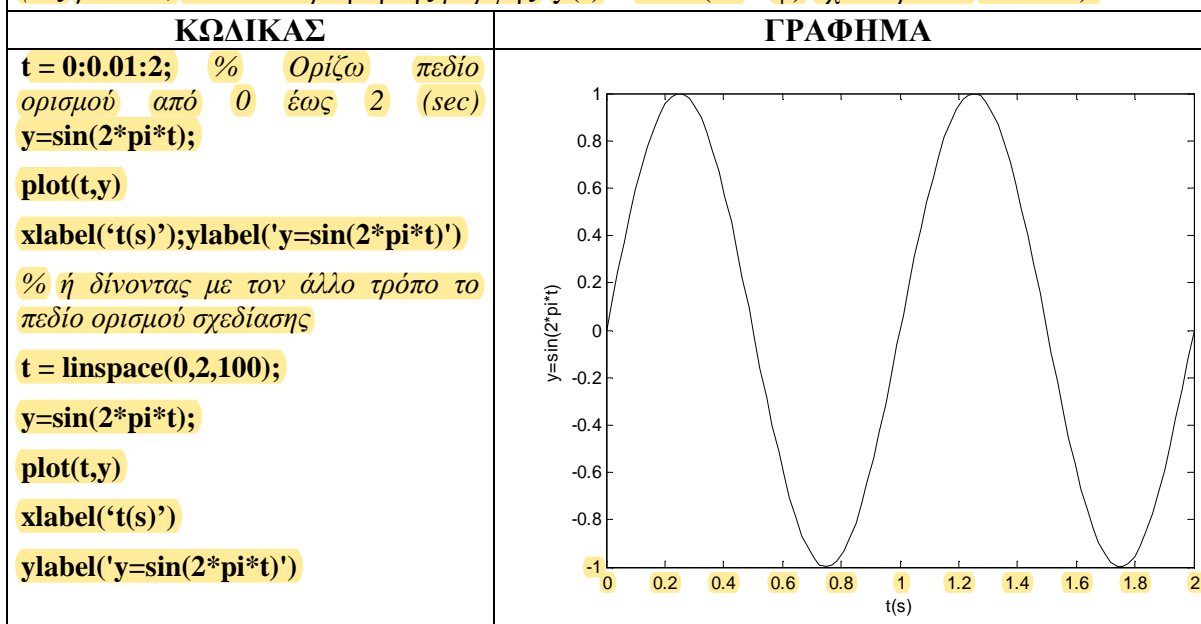
Ειδικά για τις περιοδικές συναρτήσεις (όπως είναι οι τριγωνομετρικές) για να έχουμε ένα κατάλληλο γράφημα θα πρέπει να γνωρίζουμε την περίοδο της συνάρτησης που θέλουμε να σχεδιάσουμε ώστε να ορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού σχεδίασης.

Η εντολή σχεδίασης συνάρτησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι: **plot**(ανεξάρτητη μεταβλητή, εξαρτημένη μεταβλητή), π.χ. **plot(x,y)**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

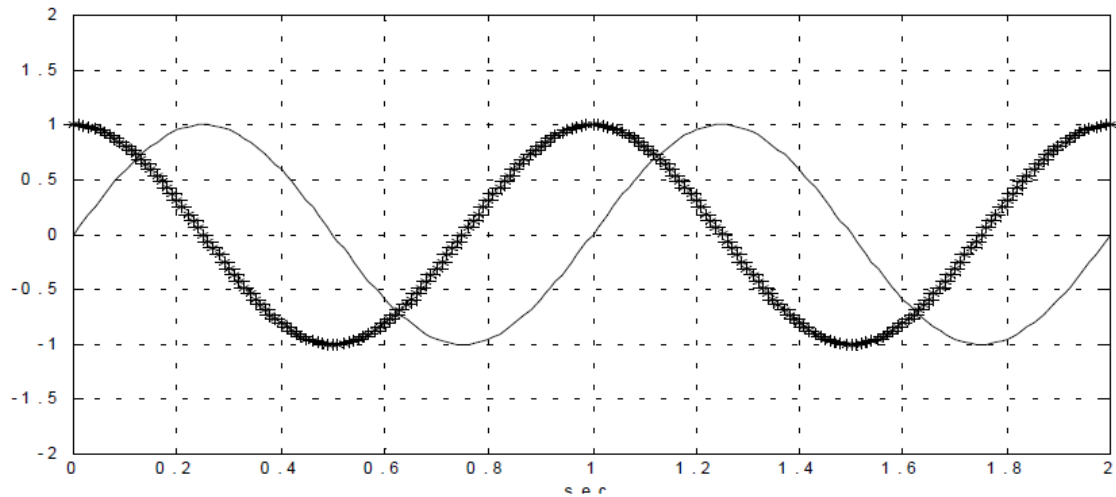
1. Να σχεδιασθεί η συνάρτηση $\mathbf{y = \sin(2\pi t)}$ σε χρονικό διάστημα δύο περιόδων της, ή αλλιώς να σχεδιαστούν δύο κύματα της y .

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2\pi = 1(\text{sec})$ ή συχνότητα $f = 1\text{Hz}$ ή 1c/sec (ως γνωστό, κάθε συνάρτηση της μορφής $y(t) = A \sin(\omega t \pm \phi)$ έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega$).



2. Μπορούμε να σχεδιάσουμε δύο ή και περισσότερες συναρτήσεις μαζί στο ίδιο γράφημα. Δηλαδή μπορεί ταυτόχρονα να γίνει το γράφημα π.χ. της $\eta\mu(2\pi t)$ και της $\sigma\upsilon\nu(2\pi t)$ δίνοντας τις παρακάτω εντολές.

```
»t=0:0.1:2;
»y=sin(2*pi*t);
»h=cos(2*pi*t);
»plot(t,y,t,h,'k*'); grid on xlabel('sec')
```



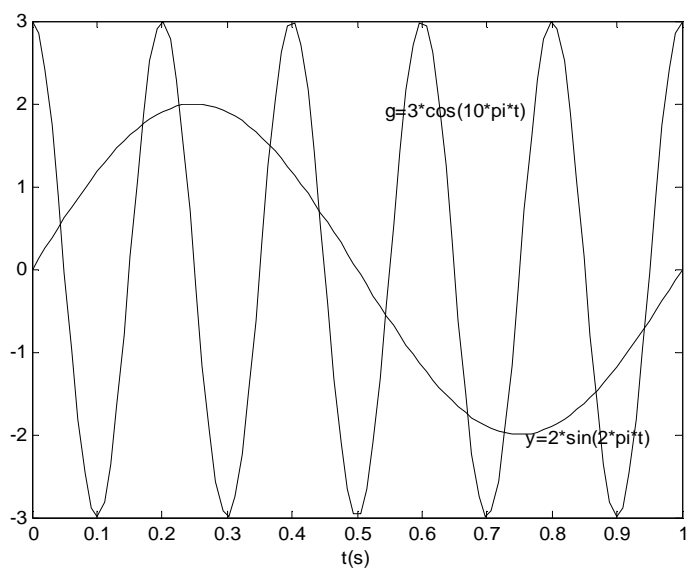
3. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα ταυτόχρονα οι συναρτήσεις,
 $y(t) = 2\eta\mu(2\pi t)$ και $g(t) = 3\sigma\upsilon\nu(10\pi t)$.

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση $y(t) = 2\eta\mu(2\pi t)$ έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2\pi = 1(\text{sec})$ και η $g(t) = 3\sigma\upsilon\nu(10\pi t)$ έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi/10\pi = 0.2(\text{sec})$. Επιλέγω ως πεδίο ορισμού σχεδίασης το διάστημα $[0,1]$.

ΚΩΔΙΚΑΣ

```
t=linspace(0,1);
y=2*sin(2*pi*t);
g=3*cos(10*pi*t)
plot(t,y,t,g)
xlabel('t(s)')
gtext('y=2*sin(2*pi*t)')
gtext('g=3*cos(10*pi*t)')
```

ΓΡΑΦΗΜΑ



A1) ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ Συναρτήσεις

$$y = \text{τοξημ}x \text{ ή } y = \sin^{-1}x \text{ ή } y = \arcsinx = \mathbf{asin(x)} : \quad \mathbf{x \in [-1,1]} \rightarrow \mathbf{y \in [-\pi/2, \pi/2]}$$

$$y = \text{τοξσυν}x \text{ ή } y = \cos^{-1}x \text{ ή } y = \arccosx = \mathbf{acos(x)} : \quad \mathbf{x \in [-1,1]} \rightarrow \mathbf{y \in [0, \pi]}$$

$$y = \text{τοξεφ}x \text{ ή } y = \tan^{-1}x \text{ ή } y = \arctanx = \mathbf{atan(x)} : \quad \mathbf{x \in \mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{y \in (-\pi/2, \pi/2)}$$

$$y = \text{τοξσφ}x \text{ ή } y = \cot^{-1}x \text{ ή } y = \text{arccot}x = \mathbf{acot(x)} : \quad \mathbf{x \in \mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{y \in (0, \pi)}$$

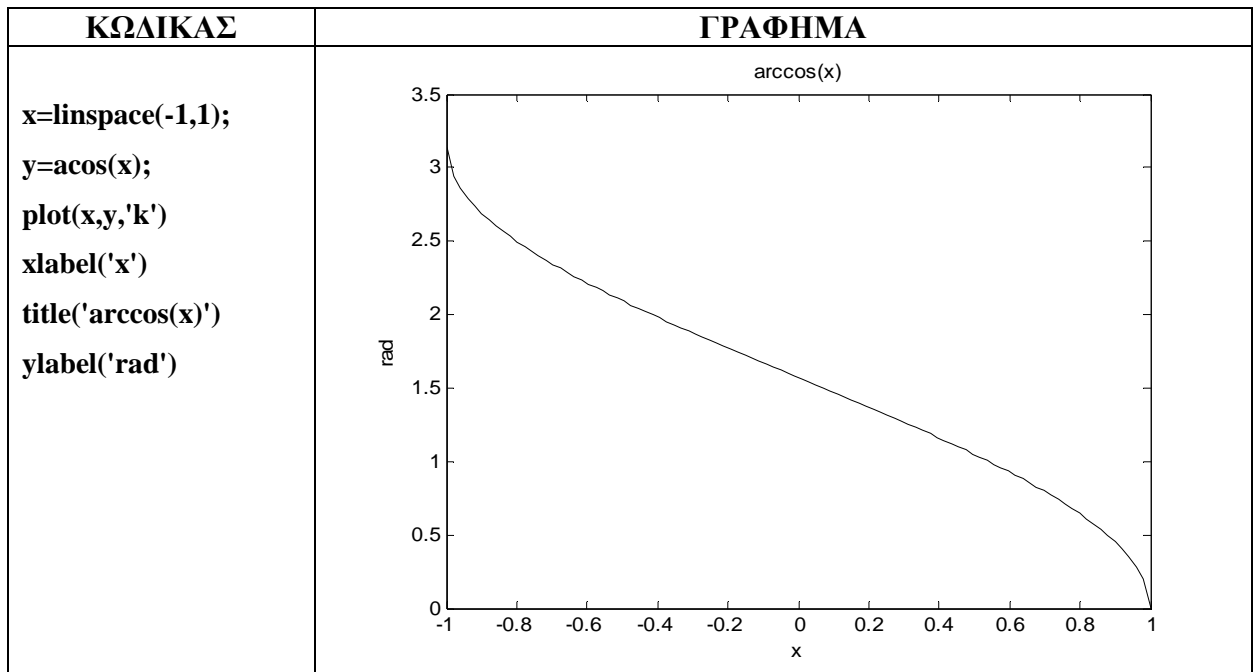
Μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των αντίστροφων τριγωνομετρικών, ισχύουν ως γνωστόν (Βλ. Μαθηματικά-Ι) οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} y = \sin^{-1}x &\Leftrightarrow x = \sin y \\ y = \cos^{-1}x &\Leftrightarrow x = \cos y \\ y = \tan^{-1}x &\Leftrightarrow x = \tan y \\ y = \cot^{-1}x &\Leftrightarrow x = \cot y \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να σχεδιαστεί η αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση της $\cos(x)$, δηλ. της συνάρτησης $y = \text{τοξσυν}x = \cos^{-1}x = \arccosx = \mathbf{acos(x)}$.

ΛΥΣΗ



B) ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ Συναρτήσεις

$$f_a : x \in \mathbb{R} \rightarrow f_a(x) = a^x \in (0, \infty)$$

$$\text{με } a > 0 \text{ και } a \neq 1 .$$

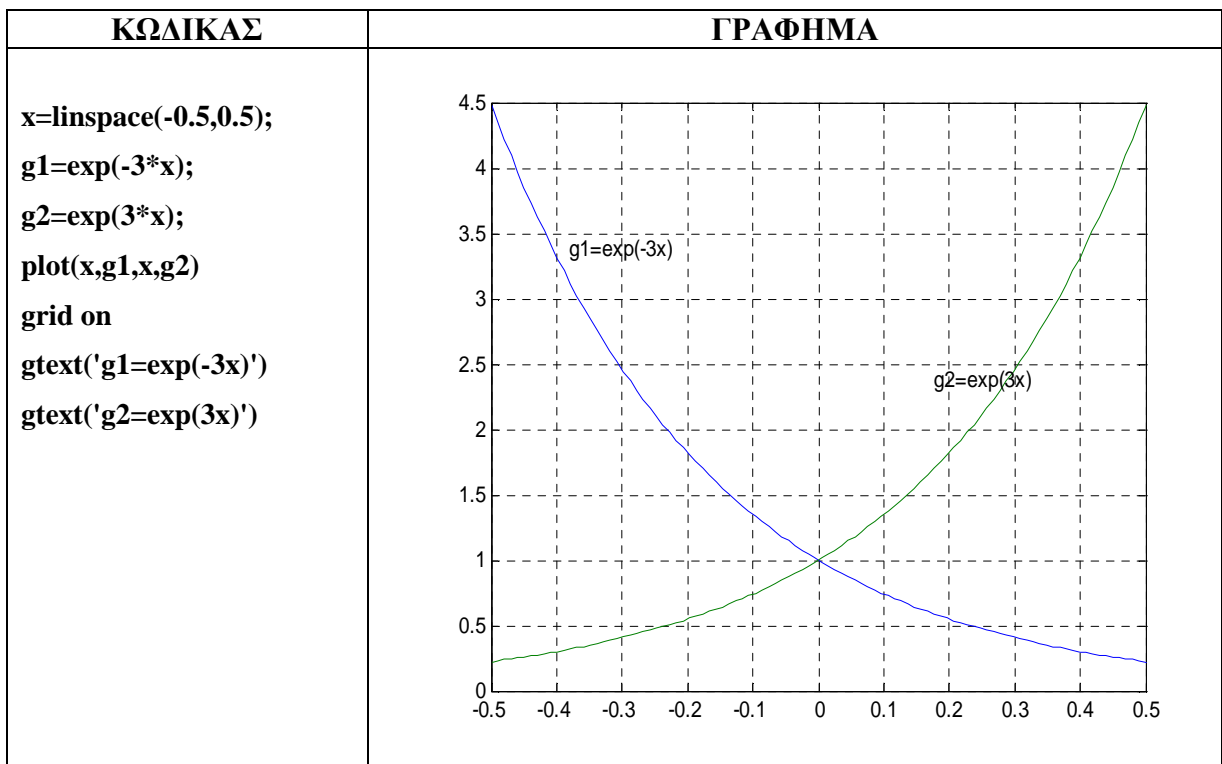
Ειδικότερα η συνάρτηση $f_e(x) = e^x$ λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση το e**,

όπου $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182828 \dots$ (άρρητος-υπερβατικός αριθμός).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να σχεδιασθούν (στο ίδιο γράφημα) οι εκθετικές συναρτήσεις,

$$g1=e^{-3x} \text{ και } g2=e^{3x}.$$



B1) ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ή ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ Συναρτήσεις

Η συνάρτηση $y = \log_a x$ λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** και είναι η **αντίστροφη** της αντίστοιχης εκθετικής συνάρτησης με βάση το a .

Η συνάρτηση $y = \ln x$ λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e** .

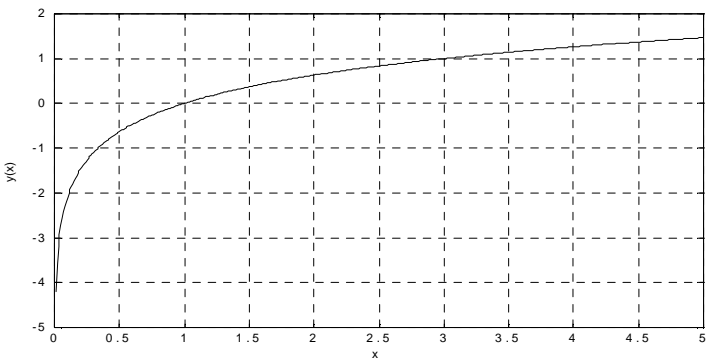
Για να σχεδιάσουμε το γράφημα μιας λογαριθμικής συνάρτησης με μια τυχαία βάση την μετατρέπουμε σε λογαριθμική με βάση το 10 ή το e .

Σχετικά ισχύουν ως γνωστό οι σχέσεις: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$, $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$, $e^{\ln x} = x$,

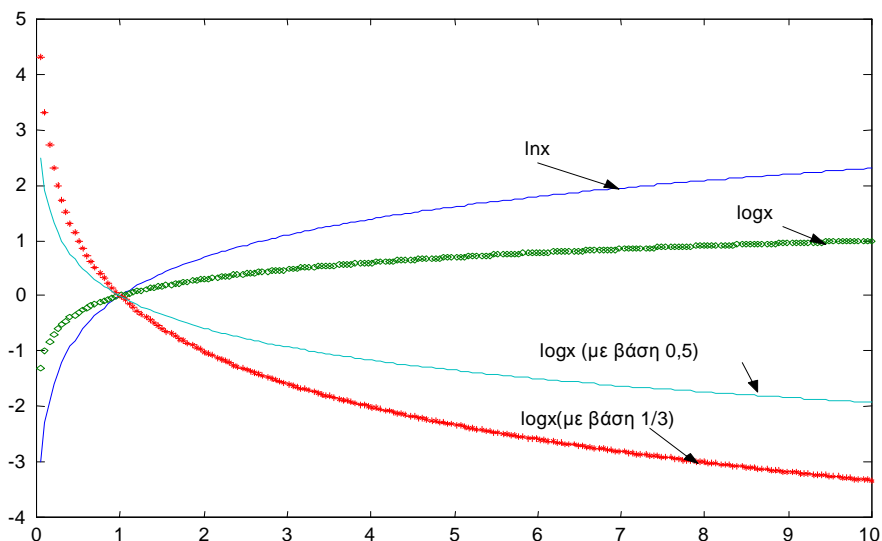
ενώ ως προς διαφορετικές λογαριθμικές βάσεις ισχύει, $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση: $y = \log_3 x = \frac{\log x}{\log 3} = \frac{\ln x}{\ln 3}$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
<pre> x = linspace(0,5,100); y = log(x)/log(3); plot(x,y); grid on; xlabel('x'); ylabel('y(x)') </pre>	

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα τεσσάρων λογαριθμικών συναρτήσεων: $g(x) = \ln x$, $f(x) = \log x$, $h(x) = \log_{0,5} x$ και $s(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Να γραφεί ο κώδικας σχεδίασης.



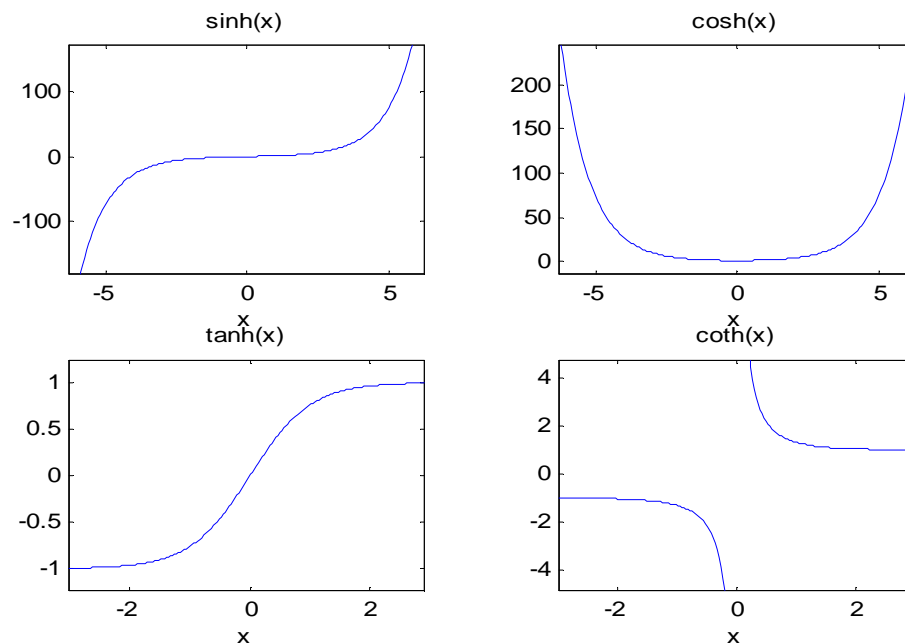
Γ) ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ Συναρτήσεις

Υπερβολικές λέγονται ως γνωστόν οι συναρτήσεις που δημιουργούνται από αλγεβρικά αθροίσματα των εκθετικών (νεπέρειων) συναρτήσεων, ως εξής :

$$\text{Υπερβολικό ημίτονο: } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{Υπερβολικό συνημίτονο: } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{Υπερβολική εφαπτομένη: } \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{Υπερβολική συνεφαπτομένη: } \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Άσκηση: Να γράψετε τον κωδικό σχεδίασης των παρακάτω υπερβολικών συναρτήσεων:



Γ₁) ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ Συναρτήσεις

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1, \quad \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σχεδίαση της, $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$

ΚΩΔΙΚΑΣ

```
x=linspace(-2,2);
y=asinh(x);
plot(x,y,'k')
xlabel('x')
ylabel('y=asinh(x)')
```

2) ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ (ρίζες, τιμές, γράφημα)

Στο MATLAB ένα πολυώνυμο μπορεί να παρασταθεί με δύο τρόπους.

Π.χ. Το πολυώνυμο, $x = s^4 + 3s^3 - 15s^2 - 2s + 9$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

Α' Τρόπος: $x = [1 \ 3 \ -15 \ -2 \ 9]$ δηλ. ορίζουμε ένα διάνυσμα με συντελεστές 1, 3, -15, -2, 9. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε την **τιμή** ενός πολυωνύμου χρησιμοποιώντας την συνάρτηση **polyval**. Π.χ. για να βρούμε την τιμή του παραπάνω πολυωνύμου για $s=2$ δίνουμε την εξής εντολή: **polyval(x,2)**

Επίσης με την εντολή **roots([1 3 -15 -2 9])** υπολογίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου.

Β' Τρόπος (κλασικός): Μπορούμε επίσης να το ορίσουμε και με τον κλασικό τρόπο δηλ.

$x = s.^4 + 3*s.^3 - 15*s.^2 - 2*s + 9$, η τελεία αναφέρει στο πρόγραμμα τη πράξη στοιχείο-στοιχείο.

Γενικά χρησιμοποιούμε την τελεία πριν από το γινόμενο συναρτήσεων, πηλίκο συναρτήσεων, και συνάρτηση σε δύναμη, π.χ: $\sin(x).*\cos(x)$, $\sin(x).^2$, $\exp(x)/\sin(x)$, $x.^3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να σχεδιαστεί το πολυώνυμο, $v = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, καθώς και οι ρίζες του.

ΚΩΔΙΚΑΣ

Εργασία 1^η

```
x=[1 4 -7 -10] % δίνω το πολυώνυμο με τη μορφή πίνακα
```

```
k=roots(x) % υπολογίζω τις ρίζες του
```

Εργασία 2^η

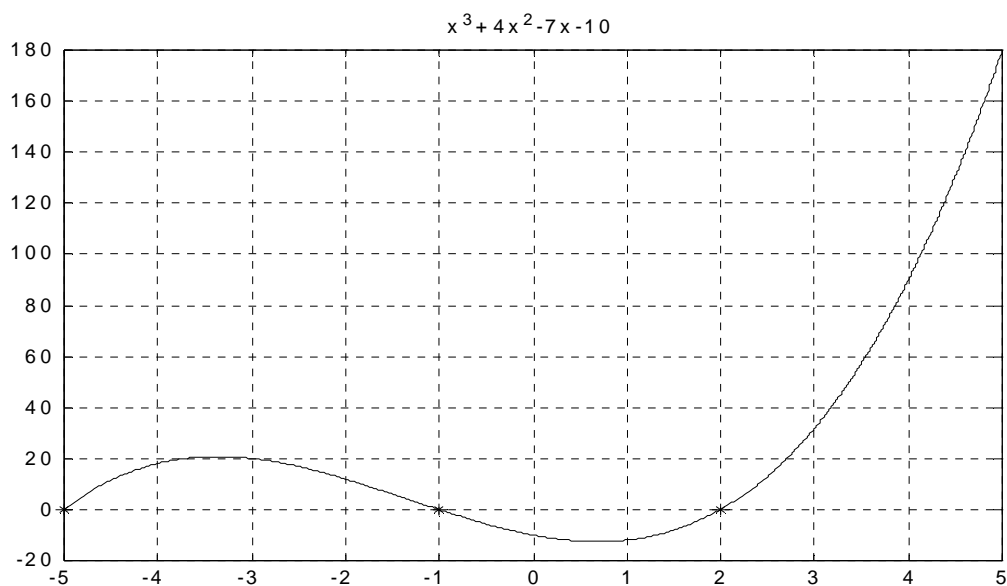
```
» x=linspace(-5,5,100); % διάλεξε 100 αριθμούς από το -5 έως το 5
```

```
» v = x.^3+4*x.^2-7*x-10; % δίνω το πολυώνυμο κλασικά, προσοχή στη τελεία
```

```
» plot(x,v),title('x^3+4x^2-7x-10'),xlabel('x'),ylabel('p(x)') % σχεδιάσε το πολυώνυμο
```

```
hold on; plot(-5,0,'r*'); hold off % εμφανίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου στην γραφική παράσταση με ένα κόκκινο για παράδειγμα αστεράκι.
```

ΓΡΑΦΗΜΑ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχεδιαστούν 4 περίοδοι-κύματα των συναρτήσεων: $E_1(t) = 5\sin(20\pi t - 3\pi/2)$ και $E_2(t) = 5\sin(20\pi t + 3\pi/2)$, καθώς και του αθροίσματός τους $E = E_1(t) + E_2(t)$.
2. Σε ένα κύκλωμα R L C σε σειρά, δίνονται $R=10$, $L=0,1H$, $C=10mf$ και όλα είναι συνδεδεμένα με πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V=140\eta\mu 314t$ Volt. Υπολογίστε την εμπέδηση του κυκλώματος Z και την διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης V(t) και έντασης του ρεύματος I(t). Δίνονται οι παρακάτω τύποι: $I(t)=I_0\eta\mu\omega t$, $V(t)=V_0\eta\mu(\omega t - \theta(\text{rad}))$, $Z=I_0/V_0$, $Z=R+(L\omega - 1/C\omega)i$. Επίσης να σχεδιαστούν ταυτόχρονα οι ανωτέρω συναρτήσεις σημειώνοντας δίπλα σε κάθε γράφημα τον τίτλο της κάθε συνάρτησης.
3. Δίνονται το πολυώνυμο, $f(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 2x + 3$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
 - α) Να βρεθούν οι ρίζες τους και οι τιμές τους για $x=7$ και $x=13$.
 - β) Να δοθεί το γράφημά τους, όπου θα εμφανίζεται ο τίτλος, οι άξονες x, y, καθώς και οι ρίζες τους με ένα κόκκινο αστεράκι.
4. Η ατμοσφαιρική πίεση P (atm.) σε σχέση με το ύψος h (m) από το έδαφος δίνεται από την εκθετική συνάρτηση: $P(h) = P_0 e^{-\frac{h}{7}}$. Αν $P_0 = 1,01 \times 10^5$ (atm.). Να σχεδιαστεί η συνάρτηση της ατμοσφαιρικής πίεσης.
5. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $\log_5 x$ (λογάριθμος x με βάση 5).
6. Να επιλυθεί γραφικά η εξίσωση: $5e^{-x} = \ln x$
7. Να σχεδιάσετε 3 κυματομορφές (περιόδους) της συνάρτησης $g(t) = A\sin(\omega t)$ με μέγιστη τιμή 10 και συχνότητα 600Hz (c/s).
8. Να γίνει η γραφική παράσταση του τριωνύμου, $y = -x^2 + 6x - 9$. Να δοθεί τίτλος στο γράφημα και να ονομαστεί ο άξονας χ και ο άξονας ψ. Να δείξετε με ένα αστεράκι τις ρίζες του τριωνύμου πάνω στο γράφημα.. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας του γραφήματος;
9. Να σχεδιαστούν οι ευθείες $\psi = 2\chi + 1$ και $\lambda = -1/2\chi + 1$. Τι παρατηρείτε; Τι γωνία θα έπρεπε να σχηματίζουν οι δυο ευθείες μεταξύ τους;
10. Να επιλυθεί γραφικά η εξίσωση: $18e^{-2x} = \ln(3x) + 10$.
11. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα οι συναρτήσεις: e^x , 10^x , $\ln x$, $\log x$, $(\frac{1}{10})^x$, $(\frac{1}{e})^x$, και να αναγνωρίσετε (ονομάσετε) στο γράφημα την κάθε μια.
12. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα οι συναρτήσεις: e^{3x} , e^{-3x} , 3^x , 3^{-x} , και να αναγνωρίσετε (ονομάσετε) στο γράφημα την κάθε μια.
13. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $\cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$.

ΜΑΘΗΜΑ 3^ο**ΠΙΝΑΚΕΣ** (Πράξεις, Ορίζουσες, κλπ, Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα)**ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ** (γραμμικών και μη-γραμμικών)**1) ΠΙΝΑΚΕΣ**

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]	A = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
size(A)	3 3
A(2,1)=0 % το στοιχείο της γραμμής 2 και της στήλης 1 να γίνει 0	A = 1 2 3 0 5 6 7 8 9
A^2	22 36 42 42 73 84 70 126 150
A^0	1 0 0 0 1 0 0 0 1
det(A) %ορίζουσα.	-24
inv(A) % αντίστροφος του A (inverse)	0.125 -0.25 0.125 -1.75 0.5 0.25 1.458 -0.25 -0.208
A*inv(A) % δημιουργία του μοναδιαίου πίνακα I	1.0000 0 0 0.0000 1.0000 0 0 0 1.0000
rank(A)	3
trace(A) % ίχνος	15
eig(A) % ιδιοτιμές του πίνακα A	16.1168 -1.1168 -0.0000
A' % ανάστροφος	1 0 7 2 5 8 3 6 9
[eigenvectors,eigenvalues]=eig(A) % Δίνει τις ιδιοτιμές-eigenvalues αλλά και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-eigenvectors του πίνακα A, όπου οι 3 διαγώνιες ιδιοτιμές αντιστοιχίζονται κατά σειρά στις στήλες δηλ. η 1 ^η ιδιοτιμή 16.1168 αντιστοιχεί στη 1 ^η στήλη των eigenvectors, η 2 ^η ιδιοτιμή -1.1168 στη 2 ^η στήλη, κλπ.	eigenvectors = -0.2320 -0.7858 0.4082 -0.5253 -0.0868 -0.8165 -0.8187 0.6123 0.4082 eigenvalues = 16.1168 0 0 0 -1.1168 0 0 0 -0.0000

2) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

A) Επίλυση Γραμμικού Συστήματος με την μέθοδο του αντίστροφου πίνακα

πίνακα

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα αφού δώσουμε εντολή να δημιουργήσει τον πίνακα A (τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων) και τον B (τον πίνακα των σταθερών όρων) τότε με την παρακάτω εντολή μας δίνει κατευθείαν τη λύση του συστήματος.

» $X = \text{inv}(A) * B$

Εάν ο A αντιστρέφεται ($\det(A) \neq 0$) το MATLAB μας υπολογίζει αμέσως τη λύση του γραμμικού συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$3x + 2y + 3z = 3$$

$$4x - 5y + 7z = 1$$

$$2x + 3y - 2z = 6$$

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
$A = [3 \ 2 \ 3; 4 \ -5 \ 7; 2 \ 3 \ -2]$	2
$B = [3; 1; 6]$	0
$X = \text{inv}(A) * B$	-1

B) Επίλυση Εξισώσεων και μη-Γραμμικών Συστημάτων

Όπως είδαμε στο MATLAB μπορούμε να χρησιμοποιούμε εκφράσεις με σύμβολα με την εντολή `syms x`. Με την εντολή αυτή δημιουργεί τη συμβολική μεταβλητή x , κλπ. Δεν χρειάζεται να δώσουμε πεδίο ορισμού στην μεταβλητή x .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
<code>syms x;</code> <code>y=1/(2*x^3) % δίνουμε μια συμβολική σχέση</code>	$\frac{1}{2x^3}$
<code>syms x</code> <code>f=(1/x^3+6/x^2+12/x+8)^(1/3)</code> % δημιουργούμε μια συνάρτηση f	$f = (1/x^3 + 6/x^2 + 12/x + 8)^{1/3}$
<code>h=simplify(f) % απλοποιούμε την συνάρτηση f</code>	$h = 2 + 1/x$
Επίλυση εξίσωσης	
<code>syms z x y</code> <code>solve('z*sin(x)=3*y','y')</code> % λύνει την εξίσωση ως προς τη μεταβλητή y	$\text{ans} = 1/3 * z * \sin(x)$
Επίλυση μη-γραμμικού συστήματος	
Να λυθεί το σύστημα :	
$\begin{cases} x^2 + xy + y - 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$	
<code>syms x y</code> <code>[a1 a2]= solve(x^2+xy+y-3, x^2-4x+3)</code>	$a1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $a2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- α) Να υπολογιστούν οι πίνακες: $A+B$, $A-B$, $A*B$, $B*A$, $2*A+3*B$, A^2 , B^2 , A^{-1} , B^{-1} .
 β) Να υπολογιστούν: η ορίζουσα, το ίχνος, ο βαθμός, ο ανάστροφος, ο αντίστροφος,
 γ) Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα, όλων των παραπάνω πινάκων: $A+B$, $A-B$, $A*B$, $B*A$, $2*A+3*B$, A^2 , B^2 , A^{-1} , B^{-1} .

2. Δίνονται οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι πίνακες (όπου είναι δυνατόν),

$$A*B, B*A, A*\Gamma, \Gamma*A, B^2, \Gamma^2, \Delta^2, A*\Delta, \Delta*A, \Delta*B, \\ A^{-1}, B^{-1}, \Gamma^{-1}, \Delta^{-1}.$$

3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα, τον ανάστροφο, τον αντίστροφο και τις ιδιοτιμές των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 & 9 \\ -2 & 20 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & -23 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

4. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα:

$$\begin{bmatrix} I_1 - 2I_2 - 4I_3 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 2I_1 - I_3 = 13 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} V_1 + V_2 - V_3 = 1 \\ 20V_1 + 30V_2 - 40V_3 = 30 \\ V_1 - 40V_2 + 30V_3 = 20 \end{bmatrix}.$$

5. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 80 \\ 1,5R_1 + 120 = 4,5R_2 \end{cases}.$$

6. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: $\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 1$.

7. Να λυθεί η πολυωνυμική εξίσωση: $2x^4 - 2x^3 - x^2 = 0$.

8. Να λυθεί η εκθετική εξίσωση: $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.

9. Να λυθεί η λογαριθμική εξίσωση: $\log_3 x - 2 \log_x 3 = 1$.

10. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} 1,5x = 4 \cdot e^{2t} \\ 3,72 \cdot \ln\left(\frac{1,59}{x}\right) = 2,43t \end{cases}.$$

11. Αν $Z = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}$, να αποδείξετε ότι, $L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}$.

ΜΑΘΗΜΑ 4^ο

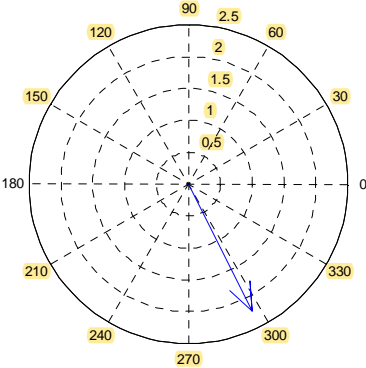
Α) ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (Πράξεις, μορφές, μέτρο, όρισμα, συζυγή, γράφημα, κτλ)

$$z = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{ή} \quad i^2 = -1$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού z	$ z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Πρωτεύον όρισμα του z	$\text{Arg}(z) = \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$

Μορφές του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$

Αλγεβρική	Πολική	Τριγωνομετρική	Εκθετική
$\alpha + \beta i$	$ z \angle \text{Arg}(z)$	$ z (\cos \varphi + i \sin \varphi)$	$ z \cdot e^{i\varphi}$

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
c1=1-2j % δίνεται ο μιγαδικός c1	c1 = 1.0000 - 2.0000i
metro=abs(c1) % υπολογίζει το μέτρο του μιγαδικού c1	metro = 2.2361
orisma_rad=angle(c1) % υπολογίζει το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού c1 σε ακτίνια	orisma_rad = -1.1071
orisma_deg=angle(c1)*180/pi % μετατρέπει τα ακτίνια σε μοίρες	orisma_deg = -63.4349
real=real(c1) % γράφει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού c1	real=1
imaginary=imag(c1) % γράφει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού c1	imaginary=-2
c=conj(c1) % γράφει τον συζυγή του c1	c=1+2j
compass(c1) % σχεδιάζει τον c1 στο μιγαδικό επίπεδο.	

```
A=[1 2 3] +j*[-4 3 2]
```

```
% δημιουργεί τον πίνακα,
```

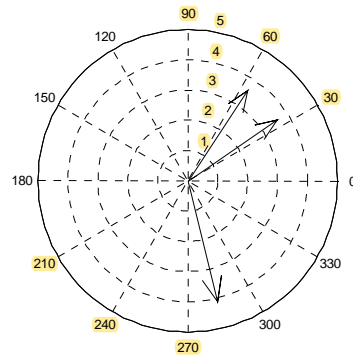
```
A=[1-4j 2+3j 3+2j]
```

```
που τα στοιχεία του είναι 3 μιγαδικοί αριθμοί
```

```
compass(A)
```

```
% σχεδιάζει τους 3 μιγαδικούς
```

```
ταυτόχρονα στο μιγαδικό επίπεδο
```



B) ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR & MAC-LAURIN

(σχέσεις τριγωνομετρικών και εκθετικών συναρτήσεων, σχέσεις Euler)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$, υπόλοιπο Lagrange.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
<pre>syms x f=taylor(log(x+1)/(x-5)) % Αναπτύσσει την συνάρτηση σε πολυώνυμο πέμπτου βαθμού.</pre>	<pre>f = -1/5*x+3/50*x^2- 41/750*x^3+293/7500*x^4- 1207/37500*x^5</pre>
<pre>syms x l y=sqrt(1-x^2/l^2)</pre>	<pre>y = (1-x^2/l^2)^(1/2)</pre>
<pre>f=taylor(y)</pre>	<pre>f = 1-1/2*x^2/l^2-1/8/l^4*x^4-1/16/l^6*x^6</pre>
<p>Μπορούμε να δούμε γραφικά την προσέγγιση της συνάρτησης e^x από το πολυώνυμο στο οποίο αναπτύσσεται κατά Taylor.</p>	
<pre>syms x y=exp(x) taylor(y) 1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/2 4*x^4+1/120*x^5 x=linspace(-3,3,100); d=1+x+x.^2/2; y=exp(x); s=1+x; plot(x,y,x,s,x,d,'k*')</pre>	

Σχέσεις τριγωνομετρικών, υπερβολικών και εκθετικών συναρτήσεων

$$\text{ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER: } e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ και $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

από όπου οι **σχέσεις Euler**: $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ και $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Από τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων προκύπτουν όμοια οι σχέσεις:

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad \text{και} \quad \tanh(ix) = i \tan(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς με το πρόγραμμα MATLAB:

$$z_1 = 10 \angle 30^\circ \cdot \frac{4i}{1+j}, \quad z_2 = 20e^{i\frac{\pi}{2}} + 50 \angle \frac{\pi}{6}, \quad z_3 = \left(25 \angle \frac{\pi}{4} \right)^3 + 67 \angle 60^\circ,$$

$$z_4 = \left(10 \angle 120^\circ \right)^{20}, \quad z_5 = \frac{4 \angle 50^\circ}{2 \angle 30^\circ}.$$

2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+i}{(1-i)^2}$.

- α) Να γραφεί στην αλγεβρική μορφή ($\alpha + \beta i$).
- β) Να υπολογισθεί το μέτρο του και το πρωτεύον του όρισμα.
- γ) Να σχεδιασθεί στο μιγαδικό επίπεδο.

3. Να υπολογίσετε το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z = \frac{(10 e^{-2i\pi/4}) \cdot (2 \angle 120^\circ)}{|5 \angle \pi/3|}.$$

4. Δίνονται οι μιγαδικοί: $Z_1 = -2\sqrt{3} - 2j$, $Z_2 = -5j$, $Z_3 = 1 - j$. Να βρεθεί το μέτρο

και το πρωτεύον όρισμα σε μοίρες του μιγαδικού αριθμού: $Z = \frac{Z_1^3 \cdot Z_2^5}{Z_3^5}$.

5. Αν θεωρήσουμε το ω μεταβλητή τότε ο μιγαδικός αριθμός Z είναι συνάρτηση του ω . Να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου του Z ως προς ω .

6. Να εκφράσετε τον μιγαδικό z_3 στην μορφή $\alpha + \beta i$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, δεδομένου ότι: $\frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1 \cdot z_2}$, όπου $z_1 = 3-4i$ και $z_2 = 5+2i$.

Να υπολογισθεί το μέτρο και το πρωτεύον του όρισμα. Το ίδιο και για τους

$$\text{μιγαδικούς } z_1 = \frac{1}{1+i}, \quad z_2 = \frac{3-4i}{4+5i}, \quad z_3 = \frac{10}{i}.$$

7. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 20e^{i\frac{\pi}{2}} + 50\angle\frac{\pi}{6}$.

α) Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στην αλγεβρική του μορφή.

β) Από την αλγεβρική μορφή να υπολογίσετε το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του z . γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς

$20e^{i\frac{\pi}{2}}$, $50\angle\frac{\pi}{6}$ και τον z .

8. Να αποδείξετε τη σχέση: $\left(\frac{1+3i}{1-2i}\right)^8 = 16$.

9. Να γραφεί στην πολική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός: $z = \frac{2}{1-i}$.

10. Να γραφεί στην πολική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός: $z = 12e^{45^\circ i} - 10e^{240^\circ i}$.

11. Να γραφεί στην αλγεβρική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός:
 $z_1 = 440\angle\pi/6 + 100\angle 180^\circ$.

12. Να βρεθεί το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού, $z = \frac{2}{(1+i)^4}$.

13. Να αποδείξετε μέσω του MATLAB ότι: $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$.

14. Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x η συνάρτηση $y = e^{x^2}$, και να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις y , $\text{taylor}(y)$. Τι παρατηρείτε;

15. Αναπτύξτε κατά τις δυνάμεις του x τις παραστάσεις μέχρι και τον όρο x^4 :

$$\ln\frac{1-2x}{(1+2x)^2}, \quad \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^x}.$$

16. Αναπτύξτε κατά τις δυνάμεις του x τις παραστάσεις μέχρι και τον όρο x^4 :

$$\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \cos^2 2x, \quad \sqrt{1+x}.$$

17. Να αποδείξετε ότι: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

18. Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x η συνάρτηση $y = e^x \cdot \ln(1+x) + \ln(1-x)$. Να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις y , $\text{taylor}(y)$.

19. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω τύπων:

$$\sin\left[\frac{\pi}{4}(1+i)\right], \quad \sinh(3+4i), \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3i\right).$$

ΜΑΘΗΜΑ 5^ο

Α) ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ (1^{ης} και ανώτερης τάξης, μερικές παράγωγοι)

Παράγωγος της (μονομεταβλητής) συνάρτησης $y=f(x)$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ ορίζεται ως γνωστόν η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης γ της $f(x)$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
syms a b c x; % δημιουργεί τις συμβολικές μεταβλητές a b c x. f=a*x^2+b*x+c; diff(f,x) % παραγωγίζει την f ως προς x.	$2*a*x+b$
diff(f,a) % υπολογίζει την παράγωγο της f ως προς a	x^2
diff(f,x,2) % υπολογίζει την 2 ^η παράγωγο της f ως προς x	$2*a$
Υπολογισμός μερικής παραγώγου (πολυμεταβλητής συνάρτησης) $f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$	
syms z x y z=sqrt(x^2+y^2) % δίνεται συνάρτηση με δύο μεταβλητές	$z=(x^2+y^2)^{(1/2)}$
a=diff(z,x) % υπολογίζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης z(x,y) ως προς x	$a=1/(x^2+y^2)^{(1/2)}*x$
pretty(a) % γράφει τη μερική παράγωγο a σε μαθηματική μορφή	$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$
b=diff(z,y) % υπολογίζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης z(x,y) ως προς y	$b=1/(x^2+y^2)^{(1/2)}*y$
pretty(b)	$\frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

B) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ (ορισμένα, αόριστα, διπλά-τριπλά, εμβαδά)
Αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και είναι το σύνολο όλων των
 παραγουσών της $f(x)$. Δηλαδή: $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, όταν $F'(x) = f(x)$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
<code>syms x</code> <code>f=sin(2*x)</code>	$f = \sin(2*x)$
<code>p=int(f)</code>	$p = -1/2*\cos(2*x)$
Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος , $p = \int_0^{\pi} \eta\mu(2x)dx$	
<code>p=int(sin(2*x),0,pi)</code>	$p = 0$
Προσεγγιστικός υπολογισμός εμβαδού επιπέδου χωρίου	
<code>syms x</code> <code>f=10*x*exp(-5*x^2)</code>	
<code>vpa(int(f,0,1),10)</code> % υπολογίζει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος από 0 έως 1 με προσέγγιση 10 δεκαδικών ψηφίων.	
<code>rsums(f)</code> % εμφανίζει τη διαμέριση του εμβαδού σε ορθογώνια και υπολογίζει το εμβαδόν του αθροίσματος των ορθογωνίων.	
Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος	
<p>Να υπολογιστεί το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα στη περιοχή ολοκλήρωσης T:</p> $\iint_{\Omega} x^2 dx dy \quad T = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{array} \right\}$ $\int_0^3 \left(\int_{-1}^1 x^2 dx \right) dy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 dy = \int_0^3 \left(\frac{2}{3} \right) dy = \frac{2}{3} [y]_0^3 = 2$	
<code>syms z x</code> <code>z=x^2</code> <code>a=int(z,x,-1,1)</code> <code>b=int(a,y,0,3)</code>	$z = x^2$ $a = 2/3$ $b = 2$

Γ) ΕΠΙΛΥΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

<p><i>1. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης,</i> $x^2 y''(x) + 7xy'(x) + 5y(x) = 10 - 4/x$, με αρχικές συνθήκες $y(1)=1, y'(1)=0$</p>	
<p>syms x y y=dsolve('x^2*D2y+7*x*Dy+5*y=10-4/x,y(1)=1,Dy(1)=0','x')</p>	<p>y = $1/4*(8*x-4*log(x)+1)/x-5/4/x$</p>
pretty(y)	$\frac{8x - 4 \log(x) + 1}{4x} - \frac{5}{4x}$
<p><i>2. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης,</i> $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3xe^{-x}$, αρχικές συνθήκες $y(0)=4, y'(0)=2$</p>	
<p>syms x y y=dsolve('D2y+2*Dy+y=3*x*exp(-x),y(0)=4,Dy(0)=-2','x')</p>	<p>y = $1/2*x^3*exp(-x)+4*exp(-x)+2*x*exp(-x)$</p>
pretty(y)	$1/2 x^3 \exp(-x) + 4 \exp(-x) + 2 x \exp(-x)$
<p><i>3. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης,</i> $y''(t) + 2y'(t) = 3te^{-t}$, αρχικές συνθήκες $y(0)=4, y'(0)=-2$</p>	
<p>syms y t y=dsolve('D2y+2*Dy+y=3*t*exp(-t),y(0)=4,Dy(0)=-2','t')</p>	<p>y = $1/2*t^3*exp(-t)+4*exp(-t)+2*t*exp(-t)$</p>
pretty(y)	$1/2 t^3 \exp(-t) + 4 \exp(-t) + 2 t \exp(-t)$
y=simple(y)	$y = 1/2*exp(-t)*(t^3+8+4*t)$
pretty(y)	$1/2 \exp(-t) (t^3 + 8 + 4 t)$
<p><i>4. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης,</i> $y''(t) + y(t) = 8 \cos(t)$, αρχικές συνθήκες $y(0)=1, y'(0)=-1$, και σχεδίαση της λύσης της.</p>	
<p>syms y t y=dsolve('D2y+y=8*cos(t),y(0)=1,Dy(0)=-1','t')</p>	<p>y = $(4*\sin(t)*\cos(t)+4*t)*\sin(t)-4*\sin(t)^2*\cos(t)-\sin(t)+\cos(t)$</p>
y=simple(y)	$y = 4*\sin(t)*t-\sin(t)+\cos(t)$
pretty(y)	$4 t \sin(t) - \sin(t) + \cos(t)$
ezplot(y,[-10,10])	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $q=c_1*\cos(t/\sqrt{LC}) + c_2*\sin(t/\sqrt{LC})$.
2. Θεωρώ την διαφορική εξίσωση $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση $q(t) = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$ είναι η λύση της. Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $I(t) = -\frac{dq}{dt}$.
3. Θεωρώ την διαφορική εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση $x(t) = a \cos \omega t$ είναι λύση της.
4. Θεωρώ τη διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση, $x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \varphi \right)$ είναι λύση της.
5. Βρείτε τις συντεταγμένες της ελάχιστης τιμής της αλυσοειδούς καμπύλης $y = 3 \cosh\left(\frac{x}{3}\right)$. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση.
6. Βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:
 $f = \cosh^{-1}(e^x)$, $g = \coth^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.
7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
 $\int 5e^x dx$, $\int (2x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}) dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x} \right) dx$,
 $\int \left(22e^t - \frac{10}{t} + 7 \cos t \right) dt$, $\int \frac{dt}{\cos^2 t}$, $\int kx dx$, $\int L^2 dL$,
 $\int f_0 dx$, $\int m^3 dm$.
8. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $F = \sin(\omega t) e^{-\frac{t}{RC}}$ ως προς τη μεταβλητή t.
 Με ποια μέθοδο ολοκλήρωσης υπολογίζεται το ολοκλήρωμα;

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις μεθόδους ολοκλήρωσης που γνωρίζετε και ακολούθως επαληθεύστε τα αποτελέσματα με το πρόγραμμα. $\int_0^{10} \frac{dQ}{CE-Q}$ $\int_0^2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$ $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

10. Να βρείτε το μήκος των παρακάτω καμπυλών αφού σχεδιάσετε πρώτα τις καμπύλες :

$$\ln x \text{ από } x = 1 \text{ έως } x = 2^{3/2} \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{3} \sqrt{x}(x-3) \text{ από } x = 0 \text{ έως } x = 1,$$

$$(l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx).$$

11. Να βρείτε το μήκος των παρακάτω καμπυλών που δίνονται παραμετρικά αφού πρώτα σχεδιάσετε τις καμπύλες:

$$y(t) = t^3, \quad x(t) = t^2 \text{ από } t = 0 \text{ έως } t = 1 \quad \text{και} \quad y(t) = e^t \cos t, \quad x(t) = e^t \sin t$$

$$\text{από } t = 0 \text{ έως } t = \pi, \quad (l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt).$$

12. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $I(t) = I_0 \cdot \sin 100\pi t$ στο διάστημα $[0, 10\text{ms}]$ γνωρίζοντας ότι η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή 30A. (Ενεργός τιμή συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx}$).

13. Η τάση δίνεται από τον τύπο $v = 100 \sin \theta$ volts: Βρείτε τη μέση τιμή της τάσης στο διάστημα $[0, \pi]$ (Μέση τιμή συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

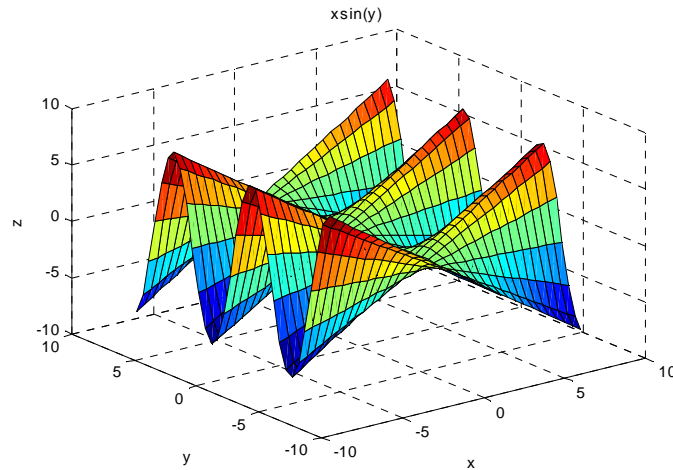
$$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx).$$

14. Ο αριθμός των ατόμων που παραμένουν στη μάζα ενός υλικού κατά τη διάρκεια ραδιενεργούς διάσπασης μετά από t sec δίνεται από τον τύπο: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, όπου N_0 και λ είναι σταθερές. Βρείτε τον μέσο αριθμό των ατόμων στη μάζα του υλικού στη χρονική περίοδο $t = 0, t = 1/\lambda$.

15. Να υπολογισθούν τα ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης:

$$\alpha) f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y \quad \text{και} \quad \beta) g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

16. Να υπολογισθούν τα ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $h(x,y)=x\eta\mu(y)$ και να επιβεβαιώσετε στο γράφημα.



Θεώρημα Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών x,y , της οποίας οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε κάποια γειτονιά του σημείου (x_0,y_0) . Έστω επίσης $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

Θέτουμε: $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $\Gamma=f_{yy}(x_0,y_0)$ και $\Delta=B^2-A\Gamma$.

Τότε α) Εάν $\Delta < 0$ και $A < 0$, το (x_0,y_0) είναι τοπικό μέγιστο σημείο.

β) Εάν $\Delta < 0$ και $A > 0$, το (x_0,y_0) είναι τοπικό ελάχιστο σημείο.

γ) Εάν $\Delta > 0$, το (x_0,y_0) είναι σαγματικό σημείο.

δ) Εάν $\Delta = 0$, δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την συγκεκριμένη περίπτωση.

17. Η ταχύτητα v κινητού δίνεται από τον τύπο: $v = (4t+3)$ m/sec όπου t (sec), βρείτε τη μέση τιμή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα $t=0, t=3$ sec.

18. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $i = I_0 \sin \omega t$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

19. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή και η μέση τιμή της τάσης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $v = 340 \sin \omega t$ στο διάστημα $[0, \pi]$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που δημιουργεί η συνάρτηση $y(x) = 5x - x^2$ με τον άξονα x' σχεδιάζοντας πρώτα τη συνάρτηση στο πρόγραμμα.

20. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\int x^2 \sin x dx, \quad \int_0^{\pi} e^{3x} \cos x dx, \quad \int_1^e x^m \ln x dx, \quad \int_0^1 \arcsin x dx, \quad \int_m^n x y e^{ax} dy.$$

21. Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα στις αντίστοιχες περιοχές ολοκλήρωσης Ω :

$$a) \left\{ \iint_{\Omega} (y - \sin(\pi x^3)) dx dy, \quad \Omega = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\}, \quad b) \left\{ \iint_{\Omega} \left(\frac{x}{1+xy} \right) dx dy, \quad \Omega = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}, \right.$$

$$c) \left\{ \iint_{\Omega} (3x^2 y^2) dx dy, \quad \Omega: y = |x|, y = -|x| \quad x \in [-1, 1] \right\},$$

$$d) \left\{ \iint_{\Omega} (xy - y^3) dx dy, \quad \Omega = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}. \right.$$

ΜΑΘΗΜΑ 6°

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ σε δισδιάστατο (2-D) και τρισδιάστατο (3-D) χώρο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
<p><i>Υπο-γραφήματα (ταυτόχρονη σχεδίαση πολλών γραφημάτων).</i> <i>Στο παρακάτω γράφημα δημιουργήσαμε 4 γραφήματα σε μια στήλη (4 σειρές και 1 στήλη)</i></p>	
<pre> x=linspace(0,2*pi); y=sin(x); z=cos(x); a=2*sin(x); b=3*cos(2*x) subplot(4,1,1) plot(x,y), title('sin(x)') subplot(4,1,2) plot(x,z); title('cos(x)') subplot(4,1,3) area(x,a); title('2sin(x)') subplot(4,1,4) area(x,b); title('3cos(2x)') </pre>	
<p><i>Σχεδίαση ακολουθίας ή χρονοδιακριτής συνάρτησης-σήματος</i> <i>Παράδειγμα: σχεδίαση της ακολουθίας $y(n)=\sin(\pi n/8)$</i></p>	
<pre> n=(0:1:64); y=sin(pi*n/8); stem(n,y) title('y=sin(pi*n/8)') grid on xlabel('n') </pre>	

Τα ειδικά θεμελιώδη Σήματα

Βηματικό-Heaviside και Κρουστικό-Dirac στο MATLAB

- Το Βηματικό-Heaviside σήμα (συνάρτηση):

$$u(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \leftrightarrow \text{Heaviside}(x-a) \text{ η } (x \geq a)$$

- Το κρουστικό-Dirac σήμα (συνάρτηση):

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases} \leftrightarrow \text{Dirac}(x-a) \text{ η } (x = a)$$

Η βηματική συνάρτηση αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την δημιουργία πολυκλαδικών συναρτήσεων στο MATLAB.

Π.χ. η συνάρτηση-σήμα, $f(t) = \begin{cases} c, & |x-a| \leq T \\ d, & |x-a| > T \end{cases}$

δημιουργείται στο MATLAB και σχεδιάζεται με τις παρακάτω 3 εντολές:

f1=(abs(x-a)<=T);

f2=(abs(x-a)>T);

f=c*f1+d*f2

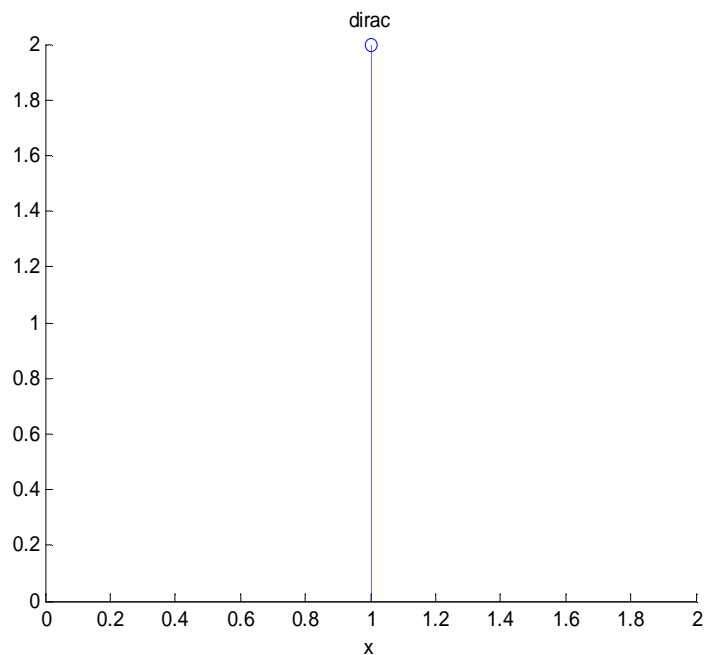
Οπότε παίρνουμε:

$$\mathbf{f = c*Heaviside(x-a+T)*Heaviside(-x+a+T)+d*(Heaviside(x-a-T)* Heaviside(-x+a-T))}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σχεδίαση της συνάρτησης Dirac, $2\delta(x-1) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$

```
x= -3:1:5;
stem ([1],[2])
title('dirac')
xlabel('x')
```

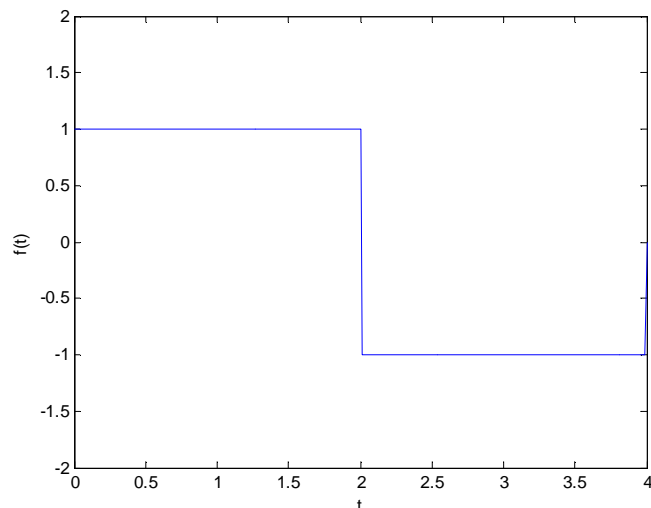


2. Σχεδίαση της συνάρτησης, $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ -1, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$.

Έστω $\alpha < x < \beta$. Με πρόσθεση κατά μέλη της ανίσωσης αυτής με το $-\frac{\alpha + \beta}{2}$ παίρνουμε:

$$-\frac{\beta - \alpha}{2} < x - \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\beta - \alpha}{2} \quad \text{ή} \quad \left| x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

```
t=0:0.01:4;% Ορίζουμε
διάστημα τιμών για την
μεταβλητή t
f1=(abs(t-1)<=1);
f2=(abs(t-3)<1);
f=f1-f2;% Δημιουργούμε την f
plot(t,f)
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
axis([0 4 -2 2])
```



Γραφήματα σε πολικές συντεταγμένες

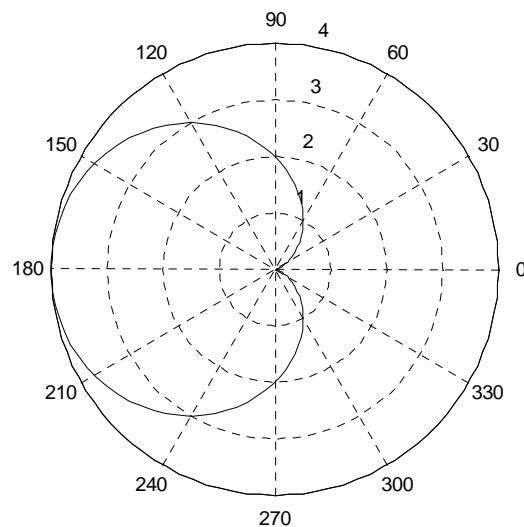
Το πολικό σύστημα συντεταγμένων είναι ένα εναλλακτικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σημείο O (**ο πόλος**) και **ο πολικός άξονας** Ox που είναι η οριζόντια ημιευθεία από το O προς τα δεξιά.

Η θέση κάθε σημείου M καθορίζεται από τις **πολικές του συντεταγμένες** $[\rho, \theta]$, όπου

- ρ είναι η **απόσταση** του σημείου M από το σημείο O ($\rho = OM$)
- θ είναι η **γωνία** που σχηματίζει η ακτίνα OM με τον πολικό άξονα.

Παράδειγμα: σχεδίαση της συνάρτησης, $r(t) = 2(1 - \cos(t))$

```
t=linspace(0,2*pi);
r=2*(1-cos(t));
polar(t,r)
title('r=2(1-cos(t))')
```

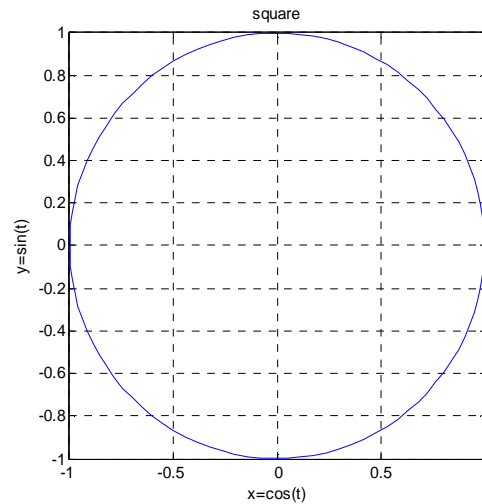


Σχεδίαση παραμετρικών εξισώσεων

Αν οι συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου P μιας καμπύλης δίνονται ως συναρτήσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ μιας άλλης μεταβλητής ή **παραμέτρου** t , τότε οι εξισώσεις λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης**.

Παράδειγμα: Να σχεδιαστεί ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$, δίνοντας τις παραμετρικές εξισώσεις του: $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$

```
t=linspace(0,2*pi);
plot(cos(t),sin(t))
axis square;
title('square')
xlabel('x=cos(t)')
ylabel('y=sin(t)')
grid on
```



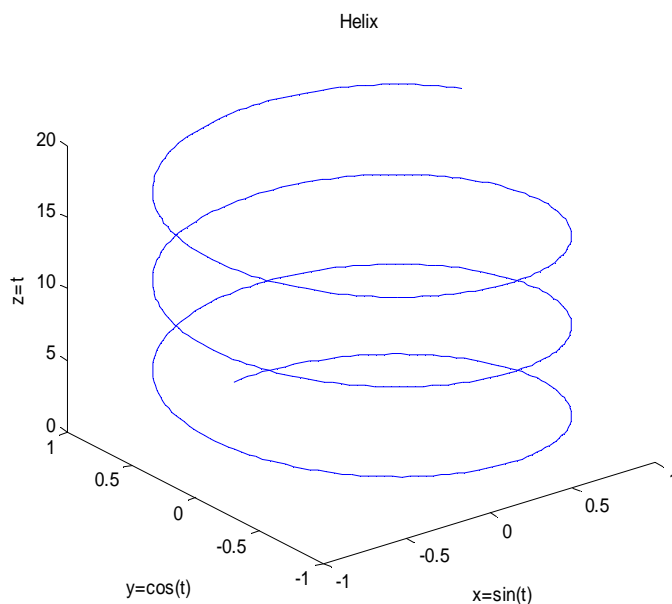
Σχεδίαση καμπύλης σε 3-d χώρο

Μπορούμε να σχεδιάσουμε μια καμπύλη σε τρισδιάστατο χώρο όταν έχουμε τη διανυσματική της εξίσωση δίνοντας τις παραμετρικές συντεταγμένες της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να σχεδιαστεί σε τρισδιάστατο χώρο η ελικοειδής καμπύλη με διανυσματική εξίσωση:
 $y(t) = i\eta\mu t + j\sigma\nu t + kt$.

```
t=linspace(0,20,500);
plot3(sin(t),cos(t), t)
title('Helix')
xlabel('x=sin(t)')
ylabel('y=cos(t)')
zlabel('z=t')
```



Σχεδίαση συναρτήσεων δύο μεταβλητών $z(x,y)$

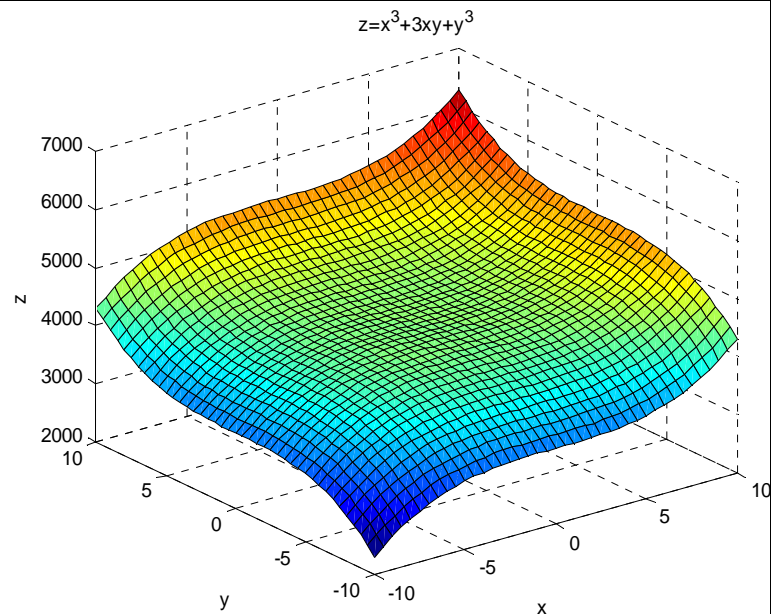
Το πεδίο ορισμού σχεδίασης δίνεται με την εντολή **meshgrid** (α, β) και αφορά το εύρος τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y .

Η εντολή σχεδίασης είναι **surf**(x, y, z).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

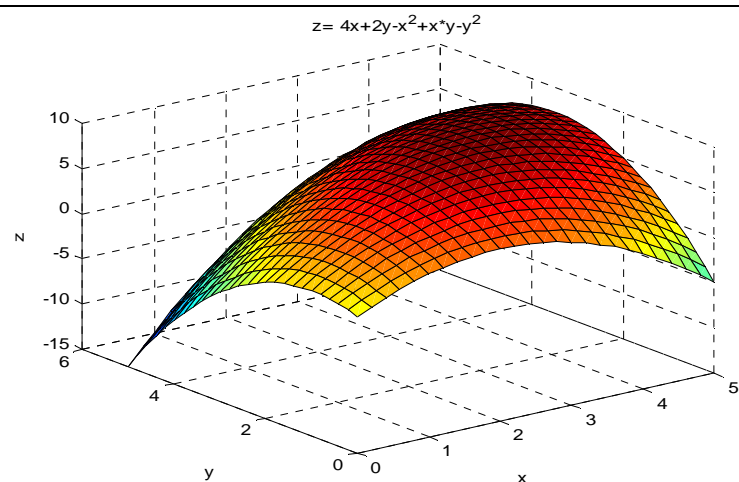
1.

```
[x,y]=meshgrid(10 :.5 :10) ;
z= x.^3+3*x*y+y.^3 ;
% προσοχή στην τελεία
surf(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid on
title('z=x^3+3xy+y^3')
```



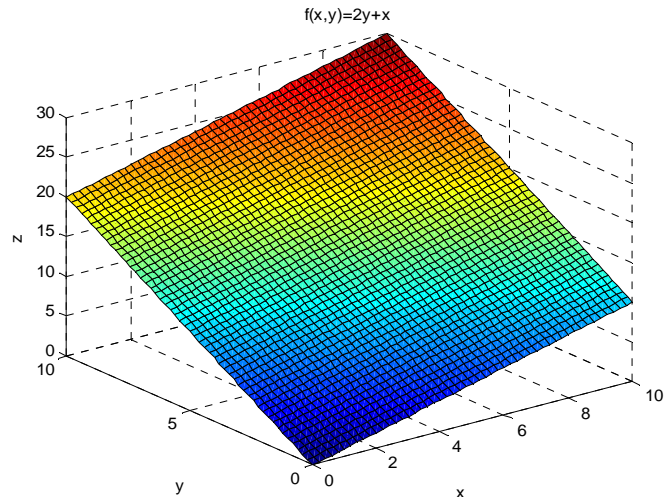
2.

```
[x,y]=meshgrid(0:.2:5);
z= 4*x+2*y-x.^2+x.*y-y.^2;
surf(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('z= 4x+2y-x^2+x*y-y^2')
```



3.

```
[x,y] = meshgrid(0:0.2:10);
z = 2*y+x;
surf(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('f(x,y)=2y+x')
```

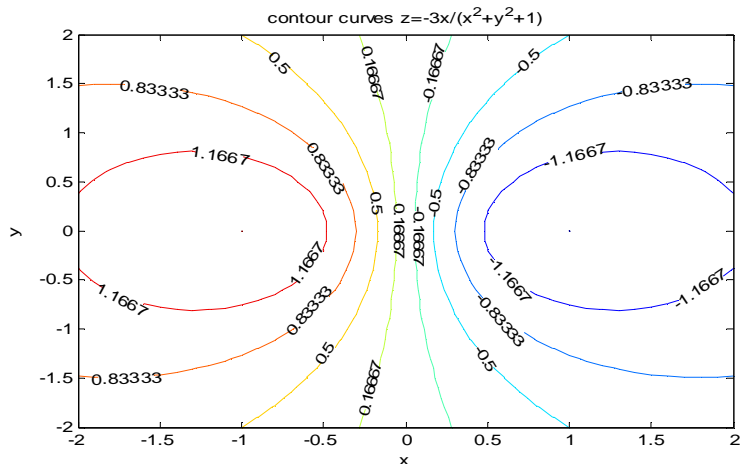


4. Έστω συνάρτηση $z=f(x,y)$. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π , με εξίσωση $z=c$, το οποίο τέμνει την γραφική παράσταση της f . Η τομή του Π με την επιφάνεια $z=f(x,y)$, θα είναι μια καμπύλη στο χώρο, η οποία έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία ισχύει: $z=f(x,y)$ και $z=c$. Δηλαδή θα είναι όλα τα σημεία (x,y,c) για τα οποία $f(x,y)=c$. Καμπύλες αυτού του τύπου τις ονομάζουμε **ισοσταθμικές καμπύλες της f** .

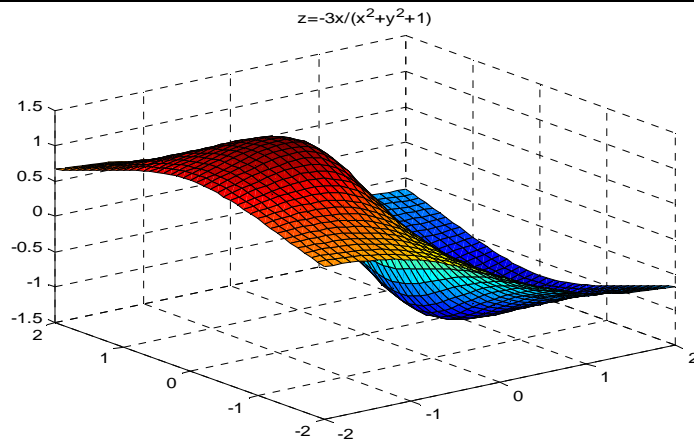
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σχεδίαση ισοσταθμικών καμπυλών της συνάρτησης, $z(x,y) = -3x/(x^2+y^2+1)$.

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);
z=-3*x./(x.^2+y.^2+1);
[c,h]=contour(x,y,z,10);
% σχεδιάζει 10 ισοσταθμικές
καμπύλες
clabel(c,h)
title('contour curves z=
-3x/(x^2+y^2+1)')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

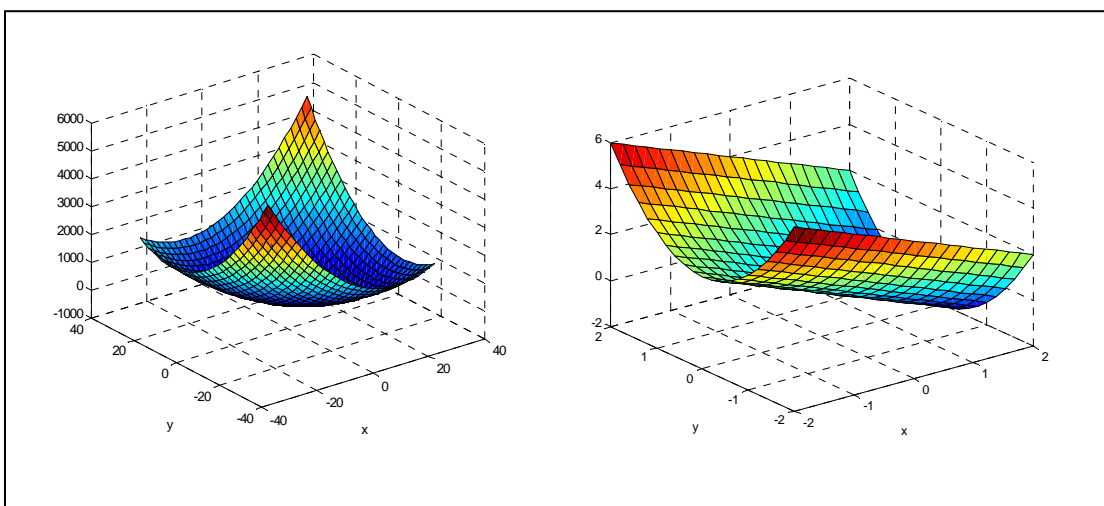


```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);
z=-3*x./(x.^2+y.^2+1);
surf(x,y,z)
title('z=-3x/(x^2+y^2+1)')
```



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχεδιαστούν σε πολικές συντεταγμένες οι συναρτήσεις $r_1 = 2\cos 2t$, $r_2 = 2\cos(3t)$, $r_3 = 2\cos(4t)$, $r_4 = 2\cos(5t)$, $r_5 = 2t$ (σπείρα του Αρχιμήδη (spiral)). Να σχεδιαστούν με την εντολή subplot(3,3,..)
2. Να γίνει η γραφική παράσταση της κυκλοειδούς καμπύλης η οποία δίνεται παραμετρικά από τις συναρτήσεις: $x(\theta) = r(\theta \cdot \sin(\theta))$, $y(\theta) = r(1 - \cos(\theta))$. Θέστε $r = 2$.
3. Να σχεδιαστεί σε τρισδιάστατο χώρο η ευθεία γραμμή με διανυσματική εξίσωση $r(t) = (1+2t)i + (-1-t)j + (2+2t)k$.
4. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα οι συναρτήσεις: e^{3x} , e^{-3x} , 3^x , 3^{-x} , 10^x και να αναγνωρίσετε (ονομάσετε) στο γράφημα την κάθε μια.
5. Να σχεδιαστεί η ευθεία, $y = (1+t)i + (-2t)j + tk$.
6. Να αναγνωρίσετε - αιτιολογήσετε - σχεδιάσετε τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $z = 4x^2 + y^2$, καθώς και τη συνάρτηση. Να αιτιολογήσετε το σχήμα με τη βοήθεια των καμπυλών.
7. Τι είδους καμπύλες είναι οι ισοσταθμικές των παρακάτω συναρτήσεων;
i) $f(x,y) = y^2 - x^2$, ii) $f(x,y) = 4 - x - 2y$, iii) $f(x,y) = x^2/9 + y^2/4$.
8. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης που τέμνει την επιφάνεια όταν $x=3$ στο σημείο $(3,-5)$. Να υποδειχθεί τι εκφράζει μαθηματικά.
9. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $z(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$ και να επιβεβαιωθούν αφού σχεδιάσετε το γράφημά της.
10. Να αναγνωρίσετε σε ποιο γράφημα αντιστοιχεί η συνάρτηση, $z(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$, και να δικαιολογήσετε την άποψή σας.



ΜΑΘΗΜΑ 7^ο

Α) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE (ML)

Υπολογισμός ευθύ και αντίστροφου ML χρονοσυνεχών-αναλογικών σημάτων

Ο Μετασχηματισμός LAPLACE μετατρέπει ένα χρονοσυνεχές (αναλογικό) σήμα $f(t)$ του πεδίου του χρόνου t , στο σήμα $F(s)$ του πεδίου συχνοτήτων s ,

σύμφωνα με την πράξη: $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$,

ενώ ο **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace** ξαναδίνει: $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Δηλ. ένα σήμα-ηλεκτρική κυματομορφή $f(t)$ που συνήθως στις εφαρμογές εξετάζεται από τον παλμογράφο στο πεδίο του χρόνου t , χρειάζεται να γνωρίζουμε το φάσμα του $F(s)$ στο πεδίο συχνοτήτων s για να αναλυθεί από το φασματοσκόπιο, και αντίστροφα. Έτσι στον τομέα των αναλογικών Γραμμικών Χρονο-Αμετάβλητων (LTI) Σημάτων-Συστημάτων, αυτή η αμφίδρομη πορεία μεταξύ του σήματος $f(t)$ ως προς τον χρόνο t και του αντίστοιχου φάσματος του σήματος $F(s)$ ως προς την συχνότητα s , επιτυγχάνεται μέσω του ML, που εδώ θα γνωρίσουμε πώς υπολογίζεται με χρήση του MATLAB.

Ι) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ υπολογισμού του Ευθύ Μετ. LAPLACE με χρήση του MATLAB

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ-ΣΗΜΑ	ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB
1) $f(t) = \sin(150\pi t)$	<pre>>>syms t s >>f=sin(150*pi*t) >>F=laplace(f,t,s) F = 150*pi/(s^2+22500*pi^2)</pre>
2) $g(t) = t^9 e^{-t-2}$	<pre>>>syms t s >>g=t^9*exp(t-2) >>F=laplace(g,t,s) F = 362880*exp(-2)/(s-1)^10</pre>
3) $d(t) = \text{dirac}(t-5)$	<pre>syms t s d=sym('dirac(t-5)') F=laplace(d,t,s) F = exp(-5*s)</pre>
4) $u(t) = u(t-2)$	<pre>syms t s u=sym('heaviside(t-2)') F=laplace(u,t,s) F = exp(-2*s)/s</pre>
5) $f(t) = \begin{cases} 2, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$	<pre>syms t s u=sym('2*heaviside(1-t)*heaviside(t+1)') F=laplace(u,t,s)</pre>

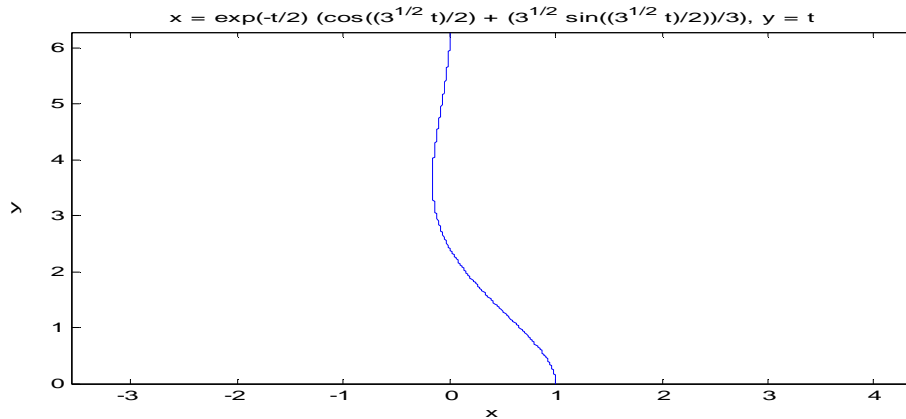
$f(t) = \begin{cases} 2, & t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$F = 2/s - 2*exp(-s)/s$
6) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ -1, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$	<pre>syms t s f=sym('Heaviside(t)*Heaviside(-t+2)-Heaviside(t-2)*Heaviside(-t+4)'); %Δημιουργούμε την συνάρτηση f F=laplace(f,t,s); % Βρίσκουμε τον ML της f τον οποίο ονομάζουμε F pretty(F)</pre>
7) Σχεδίαση της συνάρτησης-σήματος $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ -1, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$	<pre>t=0:0.01:4; % Ορίζουμε διάστημα τιμών για την μεταβλητή t f1=(abs(t-1)<=1); % Δημιουργούμε μέσω λογικής πρότασης την συνάρτηση u(n)u(-n+2) f2=(abs(t-3)<1); % Δημιουργούμε μέσω λογικής πρότασης την συνάρτηση u(n-2)u(-n+4) f=f1-f2; % Δημιουργούμε την f plot(t,f)</pre>
8) Να βρεθεί το γράφημα και η μετασχηματισμένη κατά Laplace της συνάρτησης-σήματος $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2 \\ 4-x, & 2 < x < 4 \end{cases}$	<pre>syms t s f=sym('t*Heaviside(t)*Heaviside(-t+2)+(4-t)*Heaviside(t-2)*Heaviside(-t+4)'); F=laplace(f,t,s); pretty(F) t=0:0.001:4; f1=(abs(t-1)<=1); f2=(abs(t-3)<1); f=t.*f1+(4-t).*f2; plot(t,f)</pre>
9) $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$	<pre>syms t s u= sym('t 4*heaviside(t)*heaviside(1-t)+0*heaviside(t-1)*heaviside(2-t)') F=laplace(u,t,s)</pre> $F = -4*(-1+exp(-s))/s$
10) $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$	<pre>syms t s a v f=exp(a*t)*sin(v*t) F=laplace(f,t,s)</pre> $F = v/((s-a)^2+v^2)$
11) $f(t) = \sin^2 t + 2e^{3t}$	<pre>syms t s f=(sin(t))^2+2*exp(3*t) F=laplace(f,s,t) pretty(F)</pre>

II) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ υπολογισμού του Αντίστροφου Μετασχηματισμού LAPLACE με χρήση του MATLAB

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ-ΣΗΜΑ	ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB
$F(s)=1/(s^2+9)$	<pre>syms t s F=1/(s^2+9) f=ilaplace(F,s,t) f = 1/3*sin(3*t)</pre>
$F(s)=\frac{9-4s}{2s^2+8s+40}$	<pre>syms t s F=(9-4*s)/(2*s^2+8*s+40) f=ilaplace(F,s,t) f = -2*exp(-2*t)*cos(4*t)+17/8*exp(-2*t)*sin(4*t) pretty(f) -2 exp(-2t) cos(4t) + 17/8 exp(-2t) sin(4t)</pre>

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί $L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+s+1}\right) = f(t)$ και να γίνει η γραφική της παράσταση. Επίσης να επαληθευτεί ότι, $L(L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+s+1}\right)) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
<pre>syms t s F=(s+1)/(s^2+s+1); % Δημιουργούμε την συνάρτηση f=ilaplace(F,s,t) % Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML, τον οποίο ονομάζουμε f g=laplace(f,t,s) % Υπολογίζουμε τον ευθύ ML της f, τον οποίο ονομάζουμε g h=simplify(g) % Απλοποιούμε την συνάρτηση g pretty(h) % Διαπιστώνουμε g=F ezplot(f,t)</pre>	<pre>f = exp(-1/2*t)*cos(1/2*3^(1/2)*t) +1/3*3^(1/2)*exp(-1/2*t)*sin(1/2*3^(1/2)*t) g=4/3*(s+1/2)/(4/3*(s+1/2)^2+1)+2/3/(4/3*(s+1/2)^2 +1) h = (s+1)/(s^2+s+1) s + 1 ----- S^2 + s + 1</pre>



Παράδειγμα 2: Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης-σήματος, $f(t)=\sin(10\pi t)$ και της μετασχηματισμένης της κατά Laplace $F(s)$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
<pre>syms t s f=sin(10*pi*t) F=laplace(f,t,s) F= 10*pi/(s^2+100*pi^2) subplot(2,1,1) ezplot(f,[0,2/5]) subplot(2,1,2) ezplot(F,[-20,20])</pre>	
<p>Ποιες διαφορές παρατηρείτε στο γράφημα μιας συνάρτησης κατά τον μετασχηματισμό της από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων;</p>	

Παράδειγμα 3: Υπολογισμός του αντίστροφου *M. Laplace* της συνάρτησης-σήματος $F(s)=(3\cos(\pi/4)+s*\sin(\pi/4))/(s^2+9)$ και σχεδίαση της συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο Laplace.

<pre>syms t s F=(3*cos(pi/4)+s*sin(pi/4))/(s^2+9); f=ilaplace(F) pretty(f) laplace(f) ezplot(t,f,[-30,30]) ezplot(s,F,[-3,3])</pre>	<pre>f=1/2*2^(1/2)*cos(3*t) +1/2*2^(1/2)*sin(3*t) 1/2 1/2 1/2 2 cos(3 t) + 1/2 2 sin(3 t) ans =1/2*2^(1/2)*s/(s^2+9)+3/2*2^(1/2)/(s^2+9)</pre>
---	---

B) Ανάλυση χρονοσυνεχών LTI-Συστημάτων μέσω του Μετασχηματισμού LAPLACE

Ο Μετασχηματισμός LAPLACE στη λύση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, με χρήση του MATLAB

Όπως είναι γνωστό, τα χρονοσυνεχή (αναλογικά) Σήματα-Συστήματα χρειάζεται συχνά στις τεχνολογικές εφαρμογές να μετασχηματίζονται από το πεδίο του χρόνου t , σε αντίστοιχα σήματα ενός νέου πεδίου –συνήθως της συχνότητας s (ή ω).

Όπου εκεί στο πεδίο συχνοτήτων, συνήθως το φάσμα τους είναι πιο "αποκαλυπτικό" και η επεξεργασία των σημάτων-συστημάτων είναι γενικά ευκολότερη.

Επειδή δε τα προβλήματα των αναλογικών Γραμμικών Συστημάτων στις Τεχνολογικές Εφαρμογές καταλήγουν συνήθως να μοντελοποιούνται και να περιγράφονται μαθηματικά μέσω Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, γίνεται φανερός πλέον και ο λόγος για τον οποίο οι Τεχνολόγοι προτιμούν να λύνουν τέτοιες Δ.Ε. μέσω του Μετασχηματισμού Laplace (ή αντίστοιχα μέσω του Μετασχηματισμού Fourier, ή Ζήτα, όπως θα δούμε). Αφού μέσω των κατάλληλων Μετασχηματισμών επιτυγχάνουν ταυτόχρονα και να λύνουν τέτοιες Διαφορικές Εξισώσεις αλλά και να "μεταφέρονται" από το πεδίο του χρόνου t στο πεδίο συχνοτήτων s και αντίστροφα.

Οι παρακάτω ιδιότητες του ML είναι χρήσιμες στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων

$$L\{f'(t)\} = s \cdot \Phi(s) - f(0) \quad \text{ή} \quad L\{f''(t)\} = s^2 \cdot \Phi(s) - s \cdot f(0) - f'(0), \text{ κλπ.}$$

Θα δούμε λοιπόν με ποιο τρόπο το MATLAB, περιγράφει και αναλύει χρονοσυνεχή γραμμικά συστήματα στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας με χρήση του Μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα (βλ. βιβλίο ΔΗΡΟΣ-Θεοδώρου I., κ.α., σελ. 154, &2.6.2., παραδ. 1)

Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του χρονοσυνεχούς LTI συστήματος με είσοδο $x(t) = t$, που περιγράφεται μαθηματικά από τη Γραμμική Διαφορική Εξίσωση:

$$y'' - 3y' + 2y = t, \quad \text{όταν} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να γίνει επαλήθευση ότι στην ευρεθείσα έξοδο-output $y(t)$ αντιστοιχεί η δοθείσα είσοδος-input $x(t) = t$.

ΛΥΣΗ

» `syms t s Y`

» `ode='D(D(y))(t)-3*D(y)(t)+2*y(t)=t';`

» `ltode=laplace(ode,t,s);`

» `eqn=subs(ltode,{'laplace(y(t),t,s)','y(0)','D(y)(0)'},{Y,0,0});`

» `Y=solve(eqn,Y);`

» `y=ilaplace(Y,s,t)`

$y =$

$$1/2*t + 3/4*exp(t) + 1/4*exp(2*t)$$

» `pretty(y)`

$$1/2 t + 3/4 - exp(t) + 1/4 exp(2 t)$$

» `test=diff(y,2)-3*diff(y,1)+2*y`

`test = t`

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Οι παραπομπές αναφέρονται στο αντίστοιχο βιβλίο Θεωρίας, ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ Laplace-Fourier-Zήτα, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Θεοδώρου Ι., κ.α., Αθήνα 2001)

1. Να υπολογίσετε με χρήση του MATLAB τους μετασχηματισμούς LAPLACE των παρακάτω συναρτήσεων-σημάτων:

$$\alpha) L\{10 + 12t^7 - 20t^2 - 30t\}, \quad \beta) L\{5 - e^{3t} + 12t^7\},$$

$$\gamma) L\{-9\cos(9t) - \sin(2t)\}, \quad \delta) L\left\{\frac{e^{2t}}{12} - 10\sin(3t)\right\},$$

$$\epsilon) L\left\{10 - 7\cos(6t) + \frac{1}{3}\sin(t) - 12t^5\right\}, \quad \zeta) L\{2e^{-3t}\sin(2t)\}, \quad \eta) L\{2e^{-3t} \cdot t^{10}\},$$

$$\theta) L\{5e^{-3t} - 6\cos(5t) + 10\sin(4t) - 12t^6\},$$

$$\iota) L\{u(t+4)\}, \quad \kappa) L\{\sinh(3t) - 10\cosh(2t)\},$$

$$\lambda) L\{\delta(t-1)\}, \quad \mu) L\{e^{-2t}(t+1)^2\}.$$

2. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω συναρτήσεων: α) $\frac{5}{s^2}$, β) $\frac{3}{s^5} - \frac{2}{s^4}$, γ) $\frac{3}{s+2}$, δ) $\frac{10}{(s+2)^3}$, ε) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$,

$$\sigma) \frac{-6}{s^2+9}, \quad \zeta) \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^3}, \quad \eta) \frac{s+2}{(s+2)^2+9}, \quad \theta) \frac{5}{(s+2)^2+9},$$

$$\iota) \frac{s+5}{(s+2)^2+9}, \quad \kappa) \frac{s+4}{s^2+4s+4}, \quad \lambda) \frac{7s+11}{s^2}, \quad \mu) \frac{3s^2+2s+5}{(s+1)(s^2+1)}, \quad \nu) \frac{1}{s^2-2s+9},$$

$$\xi) \frac{2s-1}{s^2+6s+10}, \quad \omicron) \frac{9-4s}{2s^2+8s+40}, \quad \pi) \frac{1}{s^2-2s+5}.$$

3. Να υπολογισθεί το σήμα $f(t)$ που το φάσμα συχνοτήτων του εκφράζεται από τη συνάρτηση $F(s) = \frac{2\cos(\pi/3) + s \cdot \sin(\pi/3)}{s^2 + 4}$ και στην συνέχεια να επαληθευτεί ότι: $L(L^{-1}(F(s))) = F(s)$. Επίσης να γίνει η γραφική παράσταση της $f(t) = L^{-1}(F(s))$ και της $F(s) = L\{f(t)\}$.

4. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις με χρήση του Μετασχηματισμού LAPLACE και μέσω του MATLAB:

$$\alpha) y' + y = \sin(t), \quad y(0) = 1, \quad (\text{Απαντ. } y(t) = 3/2e^{-t} - 1/2\cos(t) + 1/2\sin(t)).$$

$$\beta) y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2, \quad (\text{Απ. } y(t) = 2\cos(2t) + \sin(2t)).$$

$$\gamma) y'' - 3y' + 4y = 0 \quad y(0)=1, y'(0)=5.$$

$$\delta) \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2t = \cos(3t) - 17\sin(3t), \quad y(0) = -1, y'(0) = 6,$$

$$(\text{Απ. } y(t) = 2\sin(3t) - \cos(3t)).$$

5. Να λυθούν μέσω ML και MATLAB οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις :

$$\alpha) y'' + 2y' + y = \sin(2t), \quad \text{όταν } y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

$$\beta) y' + y = 1, \quad \text{όταν } y(0) = 0.$$

$$\gamma) y''' - 3y'' - 2y = 2\sinh(2t), \quad \text{όταν } y''(0) = y'(0) = y(0) = 0.$$

$$\delta) y'' + 2y' - 1 = t, \quad \text{όταν } y(1) = 1, y'(0) = 1.$$

6. Να λυθούν μέσω M.L. και MATLAB, οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 155): από 2, μέχρι 6.

7. Να λυθούν μέσω M.L. και MATLAB, οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 158): από 7, μέχρι 12.

8. Να λυθούν μέσω M.L. και MATLAB, οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 159): από 1, μέχρι 3.

9. Αν $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < 6 \end{cases}$, να βρεθεί η $\mathbf{L}(f(t))$ και να γίνει η γραφική παράσταση του σήματος f .

10. (Παράδειγμα γ, σελίδα 86, για $v=1$). Να βρεθεί ο M.L. του αναλογικού σήματος $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < 6 \end{cases}$, και να γίνει η γραφική παράσταση του σήματος f .

11. (Παράδειγμα 20, σελίδα 105). Αν $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ (t-a)^3, & t \geq a \end{cases}$, να βρεθεί η $\mathbf{L}(f(t))$, και να βρεθεί το ίδιο όταν $a=5$.

12. Να λυθούν οι ασκήσεις, σελ. 106 του βιβλίου θεωρίας: 24, 32, 33, 34, 37.

13. Να υπολογιστεί ο ML των χρονοσυνεχών σημάτων:

$$\alpha) 3u(t-7) + 5\delta(t+8),$$

$$\beta) 7\delta(t-3) - 9u(t-5),$$

$$\gamma) 5\sin(2t)[2u(t-4) - 7\delta(t-6)],$$

$$\delta) 4\cos(3t+2)u(t)u(t-2) + 3\sinh(t)\delta(t-5).$$

ΜΑΘΗΜΑ 8^ο

Α) ΣΕΙΡΑ FOURIER

Σειρά Fourier περιοδικών ή περιοδικά επεκτάσιμων συναρτήσεων-σημάτων $f(x)$, με περίοδο $T=2L$ ή κυκλική συχνότητα $\omega=2\pi/T$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{με συντελεστές:}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \beta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Σειρά Fourier άρτιων ή περιττών συναρτήσεων ορισμένες στο διάστημα $T=[-L, L]$

<u>Άρτια συνάρτηση:</u> $f(-x) = f(x), \forall x$	<u>Περιττή συνάρτηση:</u> $f(-x) = -f(x), \forall x$
$\beta_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx,$ $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$	$a_n = 0, \quad a_0 = 0,$ $\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Το φάσμα συχνοτήτων

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fourier για μια περιοδική συνάρτηση (ή περιοδικά επεκτάσιμη, υπό τις συνθήκες Dirichlet), μπορούμε να την εκφράσουμε σαν άθροισμα άπειρων αρμονικών-ημιτονοειδών όρων.

Ο κάθε αρμονικός όρος της τριγωνομετρικής σειράς Fourier περιέχει δύο πληροφορίες:

- το πλάτος-*amplitude* και
- την αντίστοιχη *συχνότητα-frequency* ω , (σε Hz).

Θεωρώντας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με οριζόντιο άξονα τη συχνότητα και κατακόρυφο άξονα το πλάτος, τότε το πλάτος κάθε όρου-προσθετού της σειράς Fourier θα παρίσταται από ένα τμήμα ευθείας παράλληλης προς τον άξονα πλατών στο σημείο που αντιστοιχεί η συχνότητα του όρου αυτού.

Μια τέτοια απεικόνιση-ανάλυση της συνάρτησης λέγεται *φάσμα πλάτους-συχνοτήτων*. Το φάσμα είναι *γραμμικό* στην περίπτωση μιας T -περιοδικής συνάρτησης ($x \in T \subset \mathbb{R}$, ΣΕΙΡΑ FOURIER) ή *συνεχές* στην περίπτωση απεριοδικής συνάρτησης ($x \in T = \mathbb{R}$, ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ υπολογισμού Σειράς Fourier

1) Δίδεται η συνάρτηση-σήμα: $f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x < 0 \\ 5, & 0 < x < 4 \end{cases}$, (βλ. Βιβλίο Δηρός, σελ.202).

α) Να σχεδιασθεί το γράφημα της συνάρτησης.

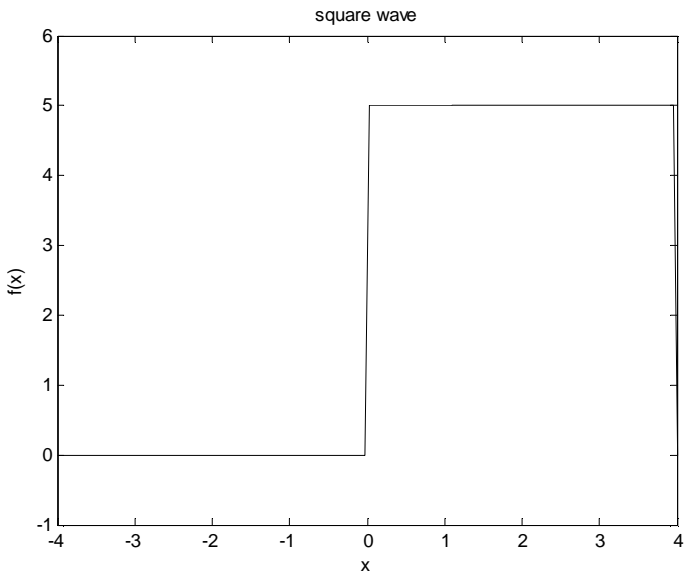
β) Να υπολογιστούν οι συντελεστές της Σειράς Fourier της συνάρτησης $f(x)$ και στη συνέχεια να γραφεί ο γενικός τύπος της. Να γραφούν αναλυτικά οι 4 πρώτοι όροι της σειράς Fourier.

γ) Να γίνει γραφικά η προσέγγιση του παραπάνω περιοδικού σήματος μέσω της σειράς Fourier.

δ) Να γίνει η απεικόνιση του φάσματος πλάτους-συχνοτήτων της, για ένα μικρό αριθμό αρμονικών.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Σχεδιασμός της } f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x < 0 \\ 5, & 0 < x < 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & |x+2| < 2 \\ 5, & |x-2| < 2 \end{cases}$$

Κώδικας	Γράφημα (I)
<pre> x=linspace(-4,4,200); f1=(abs(x+2)<2); f2=(abs(x-2)<2); f=0*f1+5*f2; plot(x,f,'k') axis([-4 4 -1 6]) xlabel('x') ylabel('f(x)') title('square wave') </pre>	
<p>Βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ και τον κώδικα σχεδιάσής της στο MATLAB, στο διάστημα μιας περιόδου της ($T=8$). Την παραπάνω συνάρτηση θα προσπαθήσουμε να την προσεγγίσουμε με την δημιουργία κατάλληλου αθροίσματος ημιτονοειδών συναρτήσεων δηλ. μέσω της ανάλυσής της σε σειρά Fourier.</p>	

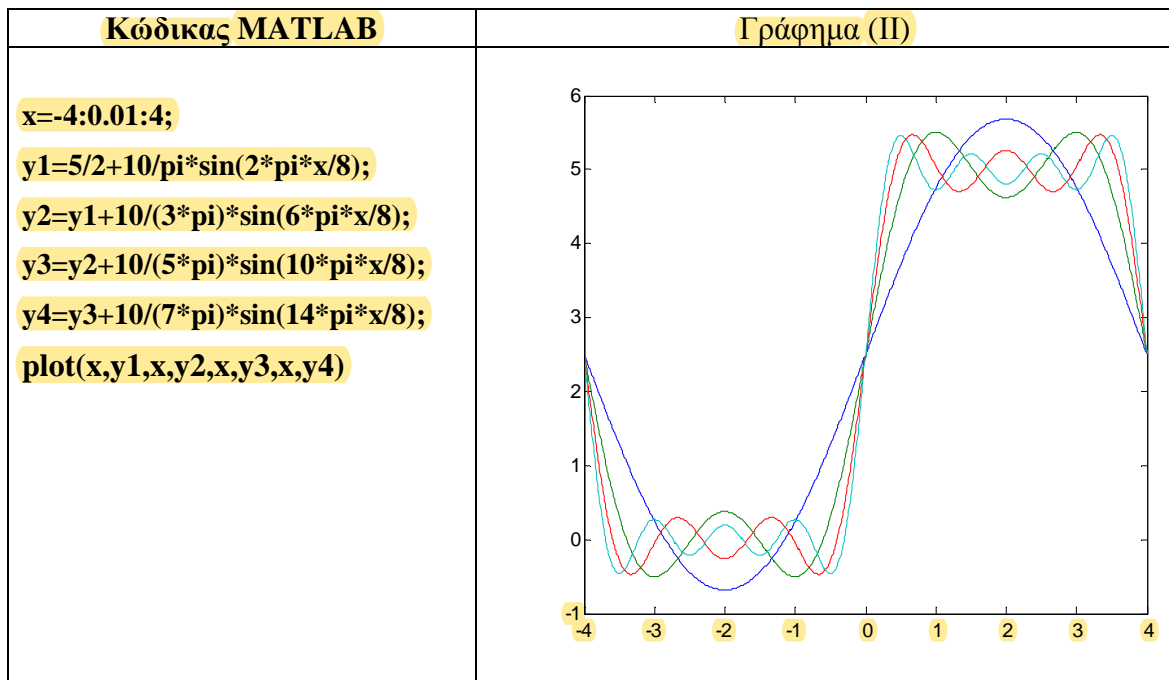
β) Υπολογισμός των συντελεστών a_n, α_n, β_n

<p>Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 5 dx$ με την βοήθεια του MATLAB</p>	<pre> syms x f=5; int(f,x,0,4) ans = 20 </pre>
<p>Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 5 \sin\left(\frac{2n\pi x}{8}\right) dx$ με τη βοήθεια του MATLAB</p>	<pre> syms n x f=5*sin((2*n*pi*x)/8) int(f,x,0,4) ans = -20*(cos(n*pi)-1)/n/pi pretty(ans) </pre>

Για $n = 1$ υπολογίζω τον συντελεστή $\beta_1 = -\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{2\pi} \cdot (-2) = 10/\pi$, που είναι ο πρώτος όρος της σειράς Fourier ή ο πρώτος αρμονικός όρος. Συνεχίζουμε για $n=2,3,\dots$ κλπ.

Καταλήγουμε ότι,
$$f(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi x}{8} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi x}{8} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi x}{8} + \dots \right).$$

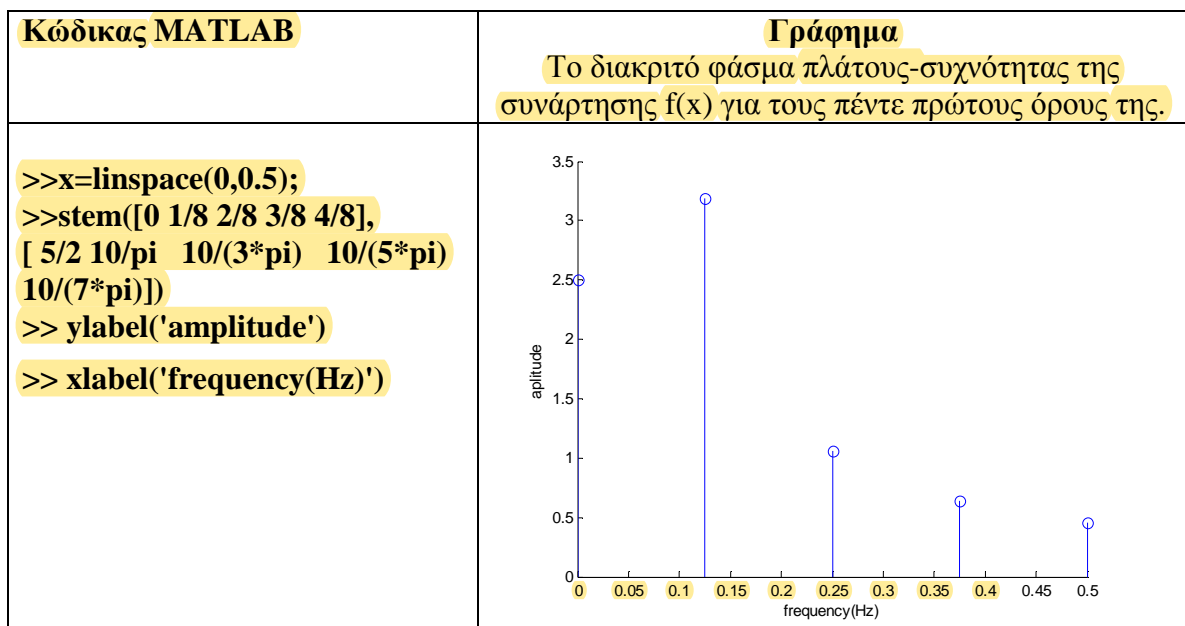
γ) Γραφική προσέγγιση της $f(x)$ μέσω της αρμονικής ανάλυσης της κατά Σειρά Fourier



[Ερώτηση: Αν συγκρίνουμε τα γραφήματα (I) & (II) τι συμπεραίνουμε;

Απάντηση: Θεωρητικά η συνάρτηση $f(x)$ προσεγγίζεται από το άθροισμα άπειρων όρων, αλλά φαίνεται ξεκάθαρα ότι από το άθροισμα των πρώτων τεσσάρων όρων της αρχίζει να διαφαίνεται η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε.]

δ) Φάσμα συχνοτήτων



2) Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x$, για x που ανήκει στο διάστημα $[-\pi, \pi]$,
(βλ. Βιβλίο ΔΗΡΟΣ, σελ.194).

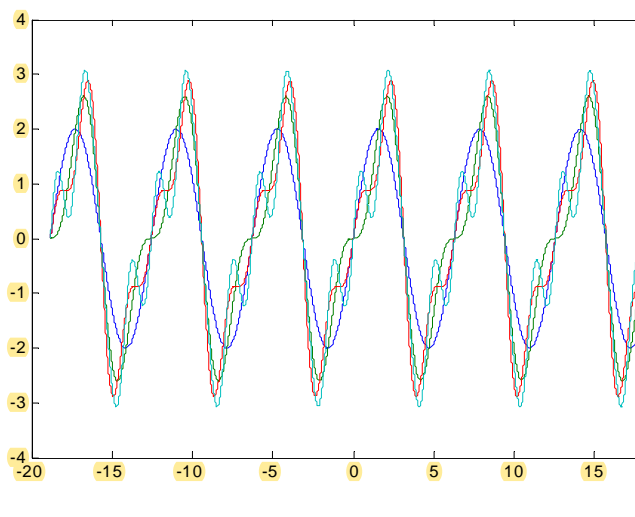
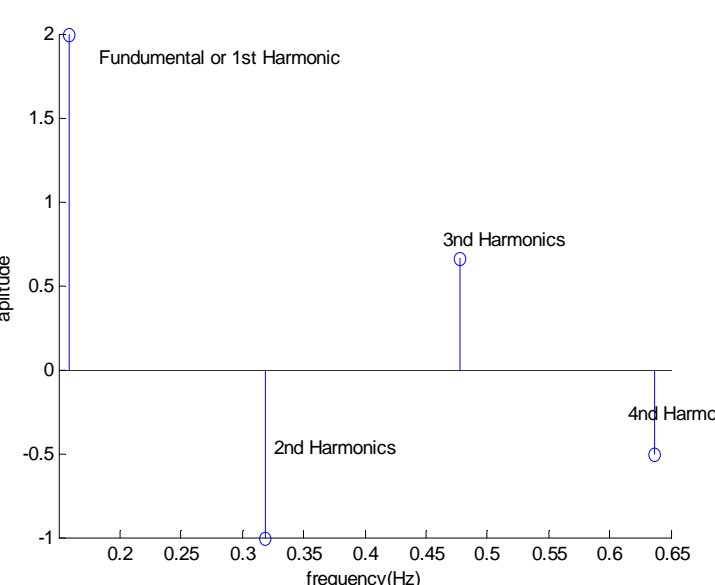
Να αποδειχθεί ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης είναι:

$$2 \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{2}{4} \sin(4x) + \dots$$

Με τη βοήθεια του MATLAB, α) Να γίνει προσέγγιση της συνάρτησης μέσω της ανάλυσής της σε σειρά Fourier, β) Να σχεδιαστεί το φάσμα συχνοτήτων της f για ένα μικρό αριθμό αρμονικών (π.χ. 4).

Παρατήρηση: Η συνάρτηση είναι περιττή με περίοδο 2π . Άρα σύμφωνα με τη θεωρία οι συντελεστές a_0 και a_n είναι μηδέν.

Λύση

Κώδικας MATLAB	Γράφημα
<pre>x=-6*pi:0.01:6*pi; >> y1=2*sin(x); >> y2=y1-sin(2*x); >> y3=y2+2/3*sin(3*x); >> y4=y3+2/4*sin(4*x); >> plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4)</pre> <p>Παρατηρώντας 6 περιόδους της συνάρτησης που έχουμε αναλύσει σε σειρά Fourier έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της ανάλυσης που επιχειρήσαμε.</p>	
Σχεδίαση των 4 πρώτων αρμονικών της f	
<pre>x=0:0.01:2/pi; stem([1/(2*pi) 2/(2*pi) 3/(2*pi) 4/(2*pi)], [2 -1 2/3 - 2/4]); ylabel('aplitude'); xlabel('frequency(Hz)') gtext('Fundamental or 1st Harmonic') gtext('2nd Harmonics') gtext('3nd Harmonics') gtext('4nd Harmonics')</pre>	

B) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER - (MF)

Υπολογισμός ευθύ και αντίστροφου MF χρονοσυνεχών σημάτων

Ο Μετασχηματισμός Fourier αποτελεί την επέκταση των Σειρών Fourier στη γενική κατηγορία των συναρτήσεων (μη-περιοδικών ή $T=\mathbb{R}$, βλ. θεωρία).

<p>Ο ορθός ή ευθύς F μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(t)$</p>	$F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \Phi(\omega), \quad -\infty < t < +\infty$
<p>Ο αντίστροφος F^{-1} μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\Phi(\omega)$</p>	$F^{-1}\{\Phi(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi(\omega) dt = f(t)$

Η φυσική σημασία του Μετασχηματισμού Fourier στις τεχνολογικές εφαρμογές:

Ο ορθός μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα απεριοδικό σήμα $f(t)$ σε ένα φάσμα συχνοτήτων $\Phi(\omega)$, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνθέτει αυτό το φάσμα και ξαναδίνει το αρχικό σήμα $f(t)$.

Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier: Όταν η συνάρτηση-σήμα $f(t)$ είναι περιοδική ή επεκτάσιμα περιοδική δηλ. έχει περίοδο-κυματομορφή $T \subset \mathbb{R}$ τότε (υπό τις συνθήκες Dirichlet) έχουμε ανάλυση σε Σειρά Fourier, ενώ όταν $f(t)$ είναι μη-περιοδική συνάρτηση δηλ. έχει $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ τότε χρησιμοποιούμε τον Μετασχηματισμό Fourier που θεωρείται ως επέκταση της σειράς Fourier, (είτε ισοδύναμα ότι η σειρά Fourier είναι περιορισμός του MF).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Υπολογισμού Μετασχηματισμού Fourier μέσω MATLAB

Συνάρτηση	κώδικας
<p>1) Να βρεθεί ο Μετασχηματισμός Fourier (M.F.) της συνάρτησης-σήματος,</p> $f(t) = te^{-\frac{t}{2}}$	<pre>syms t w f=t*exp(-t^2); % Δημιουργούμε την συνάρτηση f(t) F=fourier(f,t,w); % Ο μετασχηματισμός Fourier της f(t) pretty(F)</pre>
<p>2) α) Να βρεθεί ο (M.F.) της συνάρτησης,</p> $f(t) = -e^{-t}u(t) + 3\delta(d)$ <p>β) Να διαπιστωθεί ότι,</p> $F^{-1}\{F\{f(t)\}\} = f(t).$	<pre>syms t w f=sym('-exp(-t)*Heaviside(t)+3*Dirac(t)') % Δημιουργούμε την συνάρτηση f(t). F=fourier(f); pretty(F) g=ifourier(F,w,t); % Βρίσκουμε τον αντίστροφο (M.F.) της F pretty(g) % σε ποιο συμπέρασμα καταλήγουμε;</pre>

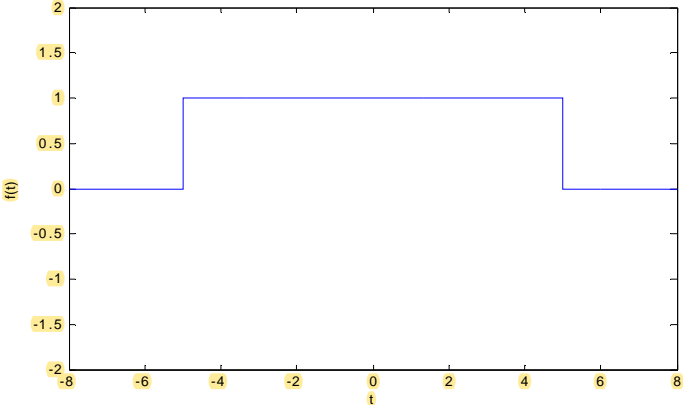
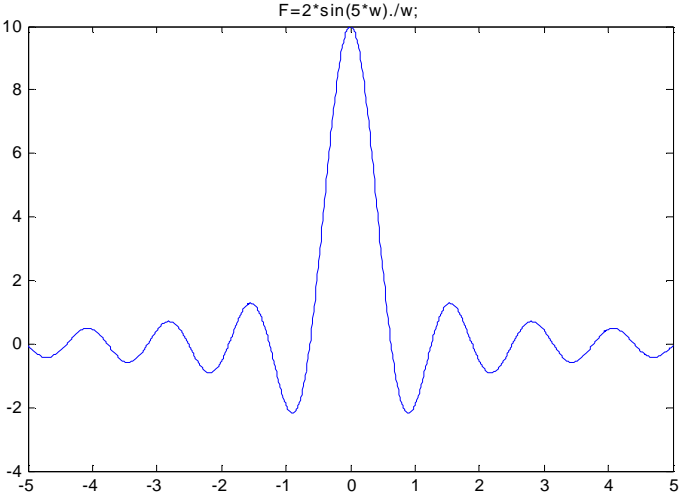
<p>3) α) Να βρεθεί ο (M.F.) της συνάρτησης</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$ <p>β) Να γίνουν τα γραφήματα των:</p> $f(t),$ $\Phi(\omega) = \mathbf{F}(f(t)).$	<pre>syms t w f=sym('Heaviside(t+1)*Heaviside(-t+1)'); F=fourier(f,t,w); simplify(F) t=-4:0.001:4; % Δημιουργούμε διάστημα τιμών για την μεταβλητή t w=-6*pi:pi/128:6*pi; % Δημιουργούμε διάστημα τιμών για την μεταβλητή w f=(abs(t)<=1); % Δημιουργούμε την συνάρτηση f(t) μέσω λογικής πρότασης F=2.*sin(w)./w; subplot(2,1,1) plot(t,f); subplot(2,1,2) plot(w,F)</pre>
<p>4) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$</p> <p>α) Να βρεθεί ο (M.F.) της f.</p> <p>β) Να δοθούν τα γραφήματα του φάσματος «μέτρον-πλάτους» $\Phi(\omega)$ και του φάσματος «ορίσματος-φάσης» $\arg(\Phi(\omega))$, ως προς ω.</p>	<pre>syms t w f=sym('exp(-t)*Heaviside(t)'); F=fourier(f,t,w); simplify(F) w=-6*pi:pi/128:6*pi; F=1./(1+i.*w); F1=abs(F); F2=angle(F); subplot(2,1,1) plot(w,F1); subplot(2,1,2) plot(w,F2)</pre>

5) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier $\Phi(\omega)$ της συνάρτησης παλμού

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 5 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Να σχεδιασθούν οι συναρτήσεις $f(t)$ και $\Phi(\omega)$.

ΛΥΣΗ

Κώδικας	Γράφημα της f(t)
<pre data-bbox="276 286 512 566">>>t=-8:0.01:8; >>f1=abs(t)<5; >>plot(t,f1) >>axis([-8 8 -2 2]) >>xlabel('t') >>ylabel('f(t)')</pre>	
Κώδικας	Γράφημα της Φ(ω)
<pre data-bbox="276 763 619 931">>>w=-5:0.01:5; >>F=2*sin(5*w)./w; >>plot(w,F) >>title('F=2*sin(5*w)./w;')</pre>	

Γ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ & ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

ενός LTI-Συστήματος μέσω του Μετασχηματισμού Fourier

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι, αν το σήμα εισόδου ενός LTI-συστήματος είναι η συνάρτηση-σήμα $x(t)$ και το σήμα εξόδου είναι η συνάρτηση-σήμα $y(t)$, τότε έχουμε:

α) Η **Συνάρτηση Μεταφοράς** $H(\omega)$ του συστήματος είναι: $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$, όπου

$X(\omega)$ και $Y(\omega)$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα. β) Η **Κρουστική Απόκριση** $h(t)$ του συστήματος είναι:

$h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\}$, ή $F\{h(t)\} = H(\omega)$. γ) Μια Γραμμική Διαφορική Εξίσωση με

γενική μορφή, $\sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \beta_{\lambda} \frac{d^{\lambda} x(t)}{dt^{\lambda}}$, έχει **Συνάρτηση Μεταφοράς**

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{\lambda=0}^{\mu} \beta_{\lambda} (j\omega)^{\lambda}}{\sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k (j\omega)^k} \quad \text{και} \quad \text{Κρουστική Απόκριση} \quad h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΚΩΔΙΚΑΣ
<p>(Βιβλίο ΔΗΡΟΣ, σελίδα 269, Άσκηση 3.β)</p> <p>1. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος είναι $H(w) = \frac{1}{iw+3}$.</p> <p>Να προσδιορισθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.</p>	<pre>syms t w H=1/(iw+3); % Δημιουργούμε την συνάρτηση μεταφοράς H h=ifourier(H,w,t); % Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση h(t) που είναι ο αντίστροφος (M.F.) της H. pretty(h)</pre>
<p>(Βιβλίο ΔΗΡΟΣ, σελίδα 264, Άσκηση 3)</p> <p>2. Ένα Γραμμικό χρονο-αμετάβλητο σύστημα-(LTI), εκφράζεται από τη διαφορική εξίσωση,</p> $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$ <p>Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ και η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.</p>	<pre>syms t w H=(2+i*w)/(3+4*(i*w)+(i*w)^2); % Δημιουργούμε την συνάρτηση μεταφοράς H(w) pretty(H) h=ifourier(H,w,t); % Βρίσκουμε τον αντίστροφο (M.F.) της H που είναι η κρουστική απόκριση pretty(h)</pre>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Έστω $f(t) = \begin{cases} -te^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Να υπολογιστεί: $\Phi(\omega) = \mathbf{F}\{f(t)\}$ και στην συνέχεια να δειχτεί ότι: $\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{f(t)\}\} = f(t)$. Να γίνουν τα γραφήματα των $f(t)$, $|\Phi(\omega)|$.
- Έστω $f(t) = -te^{-|t|}$. Να υπολογιστεί: $\Phi(\omega) = \mathbf{F}\{f(t)\}$ και στην συνέχεια να δειχτεί: $\mathbf{F}^{-1}\{\Phi(\omega)\} = f(t)$. Να γίνουν τα γραφήματα των $f(t)$, $\arg(\Phi(\omega))$.
- (Παράδειγμα 14, σελίδα 254 για $A=3$, $T=2$). Για το σήμα-συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} 3, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$, (ορθογώνιος παλμός),
 - Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους.
 - Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις: i) Του φάσματος της συχνότητας της $f(t)$, δηλαδή της $\Phi(\omega) = \mathbf{F}\{f(t)\}$, ii) Του φάσματος πλάτους της $f(t)$, δηλαδή της $|\Phi(\omega)|$, iii) της $f(t)$. Να υπολογιστεί ο (M.F) των συναρτήσεων:
 - $f_1(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$, β) $f_2(t) = e^{|t-1|}$. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των: $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\arg \Phi_1(\omega) = \arg \mathbf{F}\{f_1(t)\}$, $\arg \Phi_2(\omega) = \arg \mathbf{F}\{f_2(t)\}$.

4. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος είναι $H(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$. Να προσδιορισθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος και να διαπιστωθεί, ότι $\mathbf{F}\{h(t)\} = H(\omega)$.
5. Ένα σύστημα (LTI) περιγράφεται από την Διαφορική εξίσωση: $y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ καθώς και η κρουστική απόκριση $h(t)$ και στη συνέχεια να επαληθευτεί ότι, $\mathbf{F}\{h(t)\} = H(\omega)$.
6. Ένα σύστημα (LTI) περιγράφεται από την Διαφορική εξίσωση: $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 2x'(t) + x(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ καθώς και η κρουστική απόκριση $h(t)$ και στη συνέχεια να επαληθευτεί ότι, $\mathbf{F}\{h(t)\} = H(\omega)$.

7. Δίδεται η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < \frac{-\pi}{2} \\ 1, & \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Να ελεγχθεί αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 7 όροι της. Με βοήθεια του MATLAB να καταγράψετε την προσέγγιση της συνάρτησης μέσω της ανάλυσης της σε σειρά Fourier. Τέλος να γίνει το διακριτό φάσμα πλάτους - συχνότητας της συνάρτησης $f(t)$ για τους 7 πρώτους όρους της. Να καταγράψετε αναλυτικά τις αρμονικές συχνότητες που το απαρτίζουν.

8. Δίδεται η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} -4, & -\pi < t \leq 0 \\ 4, & 0 < t < \pi \end{cases}$

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 4 όροι της. Τέλος να γίνει το διακριτό φάσμα πλάτους - συχνότητας της συνάρτησης $f(t)$ για τους 4 πρώτους όρους της.

9. Δίδεται η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} -t, & -\pi < t \leq 0 \\ 0, & 0 < t < \pi \end{cases}$, για t που ανήκει στο διάστημα

$[-\pi, \pi]$. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 10 όροι της. Τέλος να γίνει το διακριτό φάσμα πλάτους - συχνότητας της συνάρτησης $f(t)$ για τους 10 πρώτους όρους της. Να καταγράψετε αναλυτικά την θεμελιώδη και τις υπόλοιπες αρμονικές συχνότητες στο γράφημα.

ΜΑΘΗΜΑ 9^ο

Α) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΖΗΤΑ - (MZ)

Ευθύς & Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

(Εφαρμογή στα Γραμμικά ΧρονοΑμετάβλητα-LTI Ψηφιακά Συστήματα)

Ο μετασχηματισμός Ζήτα (όπως γνωρίζουμε ήδη από τη θεωρία), αντιστοιχίζει μια ακολουθία-ψηφιακό σήμα $\{x_n\}$ ως προς μεταβλητή-χρόνο $n \in \mathbb{N}$, σε μια συνάρτηση $X(z)$ ως προς μιγαδική μεταβλητή-συχνότητα $z \in \mathbb{C}$, μέσω της απεικόνισης ζ :

$$\boxed{\zeta\left(\{x_n\}_0^{+\infty}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n} = X(z)} \quad (1)$$

$$\text{ή γενικότερα για } n \in \mathbb{Z}, \quad \zeta\left(\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n} = X(z) \quad (1a)$$

Επίσης, όπως οι γνωστοί αναλογικοί-χρονοσυνεχείς Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Laplace και Fourier, έτσι και ο ψηφιακός-χρονοδιακριτός Γραμμικός Μετασχηματισμός Z *αντιστρέφεται* μέσω μιας συγκεκριμένης διαδικασίας.

Δηλαδή και στον MZ ορίζεται μια αντίστροφη διαδικασία ζ^{-1} , που αντιστοιχίζει σήματα-συναρτήσεις $X(z)$ σε ψηφιακά σήματα-ακολουθίες $\{x_n\}$, έτσι ώστε (πρακτικά) να ισχύει:

$$\begin{aligned} \zeta\left(\{x_n\}\right) = X(z) &\Leftrightarrow \zeta^{-1}\left(X(z)\right) = \{x_n\} \\ &\text{και} \\ \zeta^{-1}\left(\zeta\left(\{x_n\}\right)\right) &= \{x_n\}, \quad \zeta\left(\zeta^{-1}\left(X(z)\right)\right) = X(z) \end{aligned} \quad (2)$$

Κατά τα γνωστά λοιπόν ήδη από τη θεωρία, όπως τα προβλήματα των χρονοσυνεχών-αναλογικών LTI σημάτων-συστημάτων αντιμετωπίζονται όπως ξέρουμε μέσω των ML και MF, όμοια και τα αντίστοιχα προβλήματα των χρονοδιακριτών-ψηφιακών LTI Σημάτων-Συστημάτων επιλύονται μέσω του MZ.

Και όπως τα χρονοσυνεχή (αναλογικά) LTI Σήματα-Συστήματα μοντελοποιούνται και περιγράφονται μαθηματικά μέσω των Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, όμοια και τα χρονοδιακριτά (ψηφιακά) LTI Σήματα-Συστήματα μοντελοποιούνται και περιγράφονται μαθηματικά μέσω των Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών (ή Διαφοροεξισώσεων) με σταθερούς συντελεστές. Έτσι ταυτόχρονα οι Γραμμικοί Μετασχηματισμοί κατορθώνουν την αμφίδρομη πορεία μεταξύ του πεδίου του χρόνου (t) και του πεδίου συχνοτήτων (s, ω, ή z).

Ας δούμε λοιπόν με ποιόν ακριβώς τρόπο το MATLAB υπολογίζει **τον ευθύ και τον αντίστροφο MZ** διάφορων χρονοδιακριτών-ψηφιακών Σημάτων-Συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ υπολογισμού ευθύ και αντίστροφου MZ

Ακολουθία	Κώδικας MATLAB
<p>1. Να προσδιορισθεί ο μετασχηματισμός Z (δηλ. το φάσμα συχνοτήτων) του ψηφιακού σήματος που εκφράζεται μαθηματικά από την ακολουθία:</p> $\{x_n\} = \left\{ \frac{2^n - (-5)^n}{7} \right\}, (n \geq 0).$	<pre>syms n z f=2^n/7-(-5)^n/7; % Δημιουργούμε την ακολουθία {x_n} G=ztrans(f,n,z); % Βρίσκουμε τον MZ της ακολουθίας {x_n} pretty(G)</pre>
<p>2. Να προσδιορισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης-σήματος,</p> $h(z) = \frac{z}{(z-2)(z+5)}.$	<pre>syms n z f=z/(z-2)/(z+5); % Δημιουργούμε την συνάρτηση h(z) H=iztrans(f,z,n); % Βρίσκουμε τον αντίστροφο MZ της h(z)</pre>
<p>3. Να επαληθευτεί η ταυτότητα</p> $\zeta^{-1}(\zeta(\{x_x\})) = \{x_k\},$ <p>για την ακολουθία-ψηφιακό σήμα</p> $\{x_k\} = \{2^k - 3k\}, (k \geq 0).$	<pre>syms k z f=2^k-3*k; % Δημιουργούμε την ακολουθία {x_k} G=ztrans(f,k,z); % Βρίσκουμε τον MZ της ακολουθίας {x_k} τον οποίο ονομάζουμε G pretty(G); h=iztrans(G,z,k); % Βρίσκουμε τον αντίστροφο MZ της G,ο οποίος ταυτίζεται με την ακολουθία {x_k} pretty(h)</pre>

B) Λύση Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών μέσω του MZ και Ανάλυση Ψηφιακών LTI-Συστημάτων μέσω του MZ

Ως γνωστόν τα προβλήματα επεξεργασίας Γραμμικών Χρονο-Αμετάβλητων (LTI) Ψηφιακών Σημάτων-Συστημάτων εκφράζονται από Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών, οι λύσεις των οποίων είναι ακολουθίες-ψηφιακά σήματα y_n .

Η καλύτερη μέθοδος επίλυσης Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών στην Τεχνολογία βασίζεται στον μετασχηματισμό Z, η οποία υλοποιείται γενικά, ως εξής:

Εφαρμόζοντας τον MZ στα μέλη της διαφοροεξίσωσης (ως προς έξοδο y_n) καταλήγουμε σε μια αλγεβρική εξίσωση ως προς τον MZ της ζητούμενης ακολουθίας, που είναι μια συνάρτηση $Y(z)$ μιας μιγαδικής μεταβλητής z .

Η λύση y_n της διαφοροεξίσωσης προκύπτει τελικά, μέσω του αντίστροφου MZ της $Y(z)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ επίλυσης Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών μέσω του MZ

Εξίσωση Διαφορών	Κώδικας επίλυσης στο MATLAB
<p>1. Να λυθεί η Διαφοροεξίσωση (Εξίσωση Διαφορών):</p> $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2^n$ <p>όταν οι αρχικές συνθήκες είναι, $y(0) = 1, y(1) = 3.$</p>	<pre> syms n s Y de='y(n+2)-2*y(n+1)+y(n)=2.^n'; % Δημιουργούμε την διαφοροεξίσωση zde=ztrans(de,n,s); % Δημιουργούμε τον MZ της διαφοροεξίσωσης eqn=subs(zde,{sym('ztrans(y(n),n,s)'),sym('y(0)'),sym('y(1)')},{Y,1,3}); %Δημιουργούμε τον MZ της διαφοροεξίσωσης χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες και αντικαθιστούμε το 'ztrans(y(n),n,s)' με Y, όπου 'ztrans(y(n),n,s)' είναι ο MZ της ακολουθίας {y(n)}, n ≥ 0. Y=solve(eqn,Y); % Λύνουμε την προηγούμενη αλγεβρική εξίσωση ως προς Y pretty(Y); iztrans(Y,s,n) % Δημιουργούμε τον αντίστροφο MZ της Y (είναι ακολουθία) που αποτελεί την λύση της δοθείσας διαφοροεξίσωσης. </pre>
<p>2. Να λυθεί το Σύστημα των Εξισώσεων Διαφορών:</p> $\begin{cases} y_{n+1} - 2x_n = 2 \\ x_{n+1} - 3y_n + x_n = 1 \end{cases}$ <p>όταν $x_0 = y_0 = 0.$</p>	<pre> syms n s Y X de1='y(n+1)-2*x(n)=2'; de2='x(n+1)-3*y(n)+x(n)=1'; zde1=ztrans(de1,n,s); zde2=ztrans(de2,n,s); eqn1=subs(zde1,{sym('ztrans(x(n),n,s)'),sym('ztrans(y(n),n,s)'),sym('x(0)')}, sym('y(0)'),{X,Y,0,0}); eqn2=subs(zde2,{sym('ztrans(x(n),n,s)'),sym('ztrans(y(n),n,s)'),sym('x(0)')}, sym('y(0)'),{X,Y,0,0}); A=solve(eqn1,eqn2,X,Y); X=A.X; Y=A.Y; x=iztrans(X,s,n); y=iztrans(Y,s,n); x=simplify(x) y=simplify(y) </pre>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Οι παραπομπές των ασκήσεων αναφέρονται στο Βιβλίο: «ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ Laplace, Fourier, Ζήτα», Θεοδώρου Ι., κ.α., Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα-2001).

1. (Άσκηση 12, σελ. 319). Αν $X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$, $Y(z) = \frac{2z^2}{(z+1)(z+2)^2}$,
να υπολογιστούν μέσω του αντίστροφου Μετασχηματισμού Ζήτα (ζ^{-1})
οι αντίστοιχες αιτιατές ακολουθίες $x(n)$, $y(n)$, $n \geq 0$.
2. (Άσκηση 10, σελ. 317). Να υπολογιστεί: $\zeta^{-1}\left(\frac{z}{z^2 - z + 1}\right)$ και στη συνέχεια να
επαληθευτεί ότι, $\zeta\left(\zeta^{-1}\left(\frac{z}{z^2 - z + 1}\right)\right) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$.
3. (Άσκηση 2, σελ. 291). Να προσδιοριστεί ο ΜΖ, $f(z)$, της ακολουθίας
 $\{x_k\} = \left\{\left(\frac{-1}{7}\right)^k\right\}$, ($k \geq 0$) και στη συνέχεια να δειχτεί, ότι $\zeta^{-1}(f(z)) = \{x_k\}$.
4. Να λυθούν με χρήση του MATLAB οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 292): 4, 5, 6.
5. Να λυθούν με χρήση του MATLAB οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 299): από 2, μέχρι 6.
6. Να λυθούν με χρήση του MATLAB οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 307): από 1, μέχρι 5.
7. Να λυθούν με χρήση του MATLAB οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 309): από 1, μέχρι 6.
8. Να λυθούν με χρήση του MATLAB οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 309): από 7, μέχρι 12.
9. (Άσκηση 2.β, σελ. 334). Να λυθεί η διαφοροεξίσωση,
 $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 5$, όταν $y(0) = y(1) = 1$
10. (Άσκηση 2.δ, σελ. 334). Να λυθεί η διαφοροεξίσωση,
 $y(k+3) + 4y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 1$, όταν $y(0) = y(1) = y(2) = 0$.

Γ) Εφαρμογές του ΜΖ σε LTI-Ψηφιακά Συστήματα, μέσω MATLAB

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου επεξεργάζεται ένα σήμα εισόδου x_n στο πεδίο του χρόνου n , για να δημιουργήσει ένα σήμα εξόδου y_n με τις επιθυμητές ιδιότητες, εφαρμόζοντας έναν αλγόριθμο που αποτελείται από απλές πράξεις μεταξύ χρονικών καθυστερήσεων του σήματος εισόδου. Ο σκοπός της άσκησης είναι να δούμε την προσομοίωση από κάποια απλά συστήματα διακριτού χρόνου και να ερευνήσουμε τις ιδιότητες τους στο πεδίο του χρόνου.

Θα ασχοληθούμε με LTI (Linear Time Invariant - Γραμμικά ΧρονοΑμετάβλητα) Συστήματα στα οποία η έξοδος $y(n)$ συνδέεται με την είσοδο $x(n)$ με την ακόλουθη σχέση (γραμμική εξίσωση διαφορών):

$$\sum_{k=0}^M r_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N p_k x(n-k)$$

Παράδειγμα 1

Έστω ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη γραμμική εξίσωση διαφορών:

$$y(n) + 0,45y(n-2) = 0,2x(n) + 0,3x(n-2) + 0,4x(n-1).$$

Αν το σύστημα διεγερθεί από το σήμα εισόδου $x(n)$ που αποτελεί το άθροισμα των σημάτων, $x_1(n) = \cos(2\pi \cdot 0,05n)$ και $x_2(n) = \cos(2\pi \cdot 0,47n)$, με $0 \leq n \leq 100$, να βρεθεί και να παρουσιαστεί γραφικά η έξοδος $y(n)$ με τη βοήθεια του MATLAB και με χρήση της συνάρτησης 'filter'.

ΛΥΣΗ

Υλοποιούμε στον editor του MATLAB το ακόλουθο πρόγραμμα :

% Δημιουργία του Σήματος εισόδου στο χρονικό παράθυρο που θα μελετήσουμε

```
n=0:100; %Μεταβάλλουμε το χρόνο από 0 έως 100 με βήμα 1
x1=cos(2*pi*0.05*n); %Ημιτονικό σήμα χαμηλής συχνότητας
x2=cos(2*pi*0.47*n); %Ημιτονικό σήμα υψηλής συχνότητας
x=x1+x2; %Δημιουργούμε την είσοδο του συστήματος
```

% Υλοποίηση του Φίλτρου (δηλαδή της εξόδου του συστήματος)

```
B=[0.2 0.4 0.3] %Διάνυσμα συντελεστών του x
A=[1 0 0.45] %Διάνυσμα συντελεστών του y
y=filter(B,A,x) %Εύρεση της εξόδου y(n)
```

% Παρουσίαση των σημάτων εισόδου x1(n) και x2(n)

```
figure(1) %Ανοίγουμε ένα παράθυρο εικόνας
subplot(2,1,1); %Χωρίζουμε το figure(1) σε 2 μέρη , γράφουμε στο πρώτο
plot(n,x1); %Σχεδιάζουμε το x1(n) συναρτήσει του n
```

```

axis([0,100,-2,2])      %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n'); %Επιγραφή του άξονα x της 1ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');   %Επιγραφή του άξονα y της 1ης γραφικής παράστασης
title('Signal #1')     %Βάζουμε τίτλο στην 1η γραφική παράσταση
subplot(2,1,2);        %Χωρίζουμε το figure σε 2 μέρη και γράφουμε στο 2ο
plot(n,x2);            %Σχεδιάζουμε το x2(n) συναρτήσει του n
axis([0 ,100,-2,2]);  %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n'); %Επιγραφή του άξονα x της 2ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');   %Επιγραφή του άξονα y της 2ης γραφικής παράστασης
title('Signal #2')     %Βάζουμε τίτλο στη 2η γραφική παράσταση

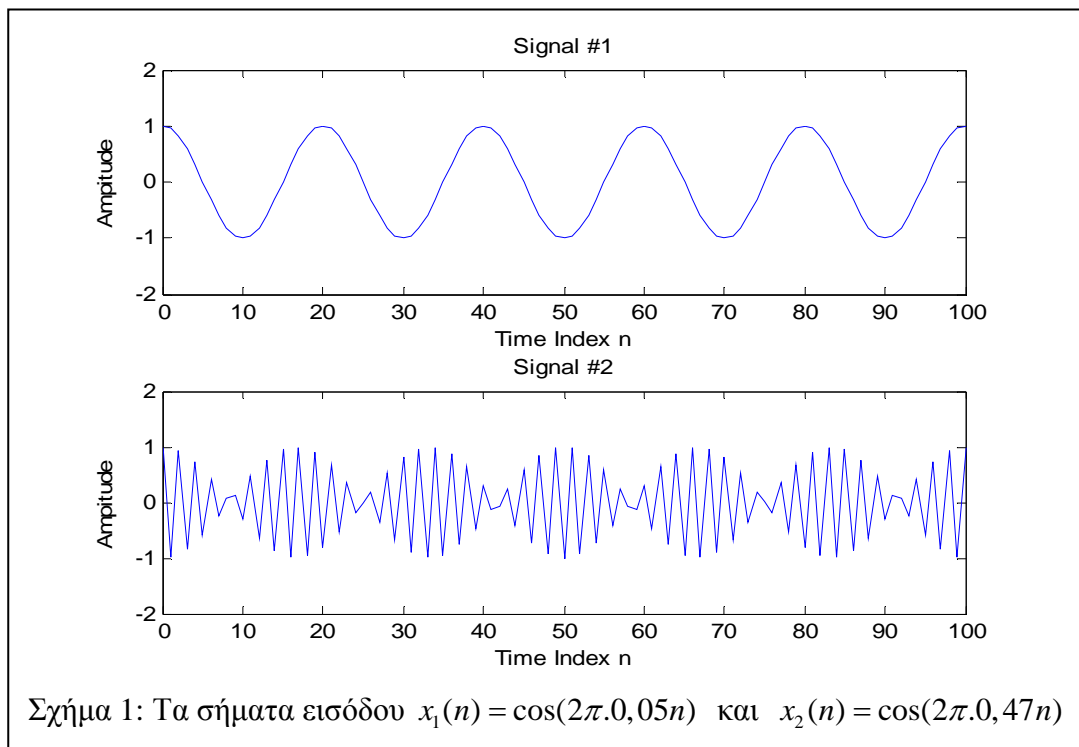
```

%Παρουσίαση των σημάτων εισόδου και εξόδου $x(n)$ και $y(n)$

```

figure(2)              %Ανοίγουμε 2ο παράθυρο εικόνας
subplot(2,1,1);        %Χωρίζουμε το figure(1) σε 2 μέρη , γράφουμε στο πρώτο
plot(n,x);            %Σχεδιάζουμε το  $x(n) = x1(n) + x2(n)$  συναρτήσει του n
axis([0,100,-2,2])    %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n'); %Επιγραφή του άξονα x της 1ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');   %Επιγραφή του άξονα y της 1ης γραφικής παράστασης
title('Input Signal') %Βάζουμε τίτλο στην 1η γρ. παράσταση
subplot(2,1,2);        %Χωρίζουμε το figure σε 2 μέρη και γράφουμε στο 2ο
plot(n,y);            %Σχεδιάζουμε το  $y(n)$  συναρτήσει του n
axis([0 ,100,-2,2]);  %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n'); %Επιγραφή του άξονα x της 2ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');   %Επιγραφή του άξονα y της 2ης γραφικής παράστασης
title('Output Signal') %Βάζουμε τίτλο στην 2η γραφική παράσταση.

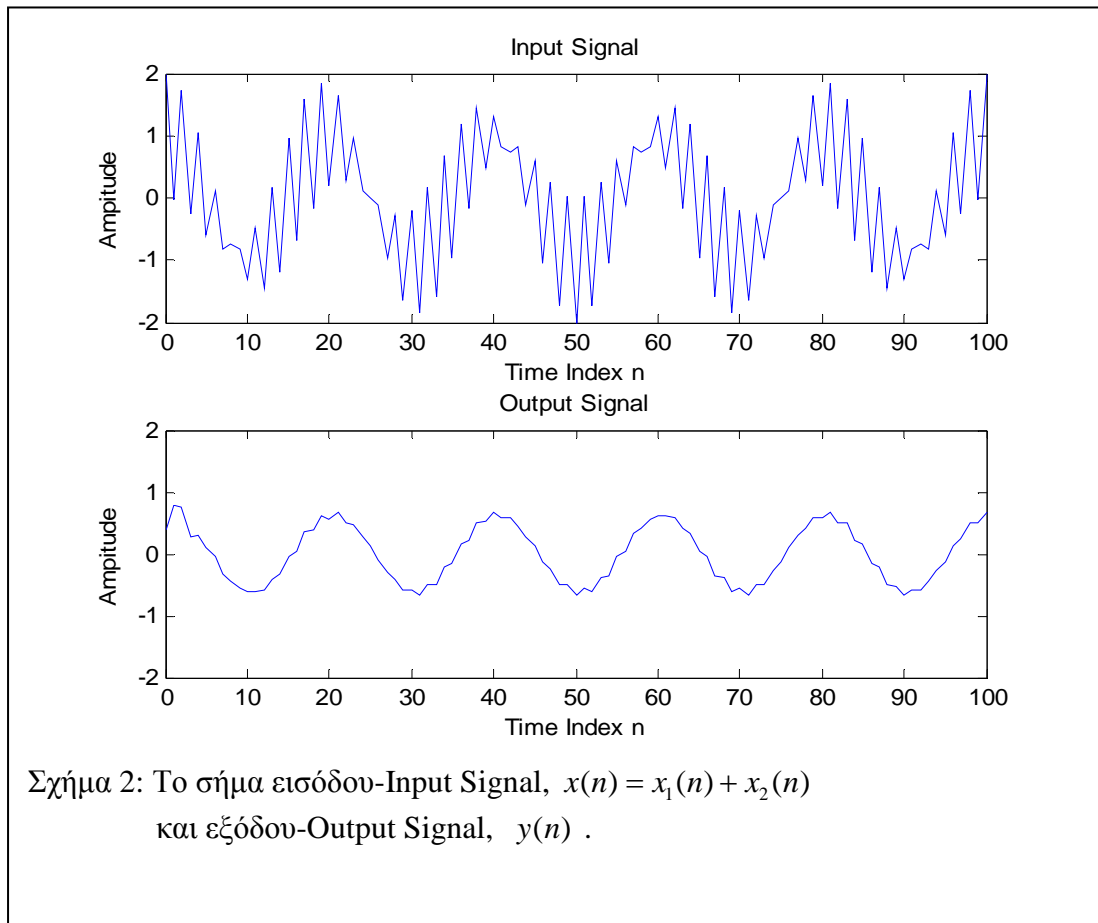
```



Παρατηρήσεις: α) Οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων εισόδου που προκύπτουν κατά την εκτέλεση του προγράμματος φαίνονται στο Σχήμα 1. Είναι εύκολο να

διακρίνουμε το σήμα υψηλής συχνότητας (**Signal #2**) : $x_2(n) = \cos(2\pi \cdot 0,47n)$,
 από το σήμα χαμηλής συχνότητας (**Signal #1**): $x_1(n) = \cos(2\pi \cdot 0,05n)$.

β) Το σήμα εισόδου-Input Signal $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ που προκύπτει από την υπέρθεση των δύο αρχικών σημάτων και το οποίο εφαρμόζεται στην είσοδο του φίλτρου που υλοποιήσαμε, καθώς και η έξοδος-Output Signal $y(n)$ του φίλτρου φαίνονται στο επόμενο Σχήμα 2.



Άσκηση

Τρέξτε πάλι το πρόγραμμα για να δημιουργήσετε το σήμα εξόδου, θέτοντας για νέα είσοδο το σήμα, $x(n) = 2x_1(n) + 3x_2(n)$. Προσπαθήστε να καταλήξετε στις ανωτέρω γραφικές παραστάσεις. Τι παρατηρείτε σχετικά με τις συχνότητες;

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε ένα σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών :

$$y(n) - 0,4y(n-1) + 0,75y(n-2) = 2,2403u(n) + 2,4908u(n-1) + 2,2403u(n-2)$$

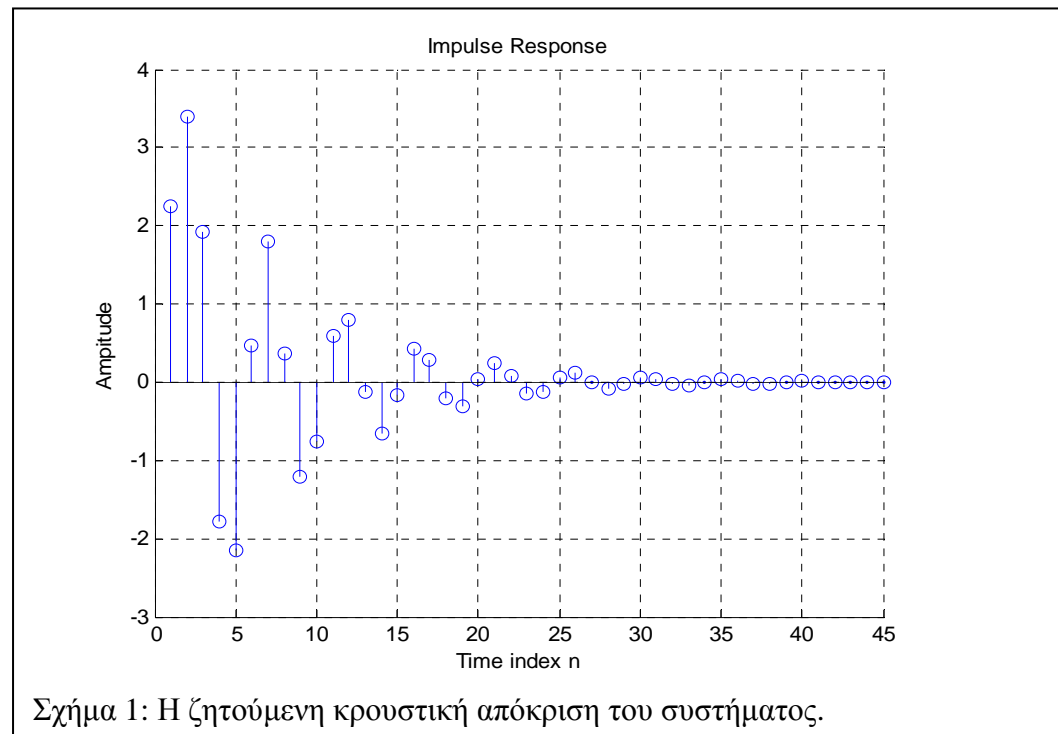
όπου $y(n)$ η έξοδος του συστήματος και $u(n)$ η είσοδος. Χρησιμοποιώντας την εντολή **y=impz(num,den,N)** και **stem(y)** του MATLAB να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Σημείωση : Στις ανωτέρω εντολές το **num** είναι οι συντελεστές του σήματος εισόδου σε μορφή πίνακα και **den** είναι οι συντελεστές του σήματος εξόδου επίσης σε μορφή πίνακα, κατά αύξοντα βαθμό καθυστέρησης. Το **N** είναι ο αριθμός των δειγμάτων που θα πάρει το πρόγραμμα βάσει του οποίου θα σχεδιάσει την κρουστική απόκριση.

ΛΥΣΗ

Υλοποιούμε στον editor του MATLAB το ακόλουθο πρόγραμμα :

```
N=45 %Αριθμός δειγμάτων της κρουστικής απόκρισης
num=[2.2403 2.4908 2.2403]; %Συντελεστές σήματος εισόδου
den=[1 -0.4 0.75]; %Συντελεστές σήματος εξόδου
y=impz(num,den,N); %Δημιουργούμε την κρουστική απόκριση
figure(1) %Δίνουμε εντολή να ανοίξει ένα figure
stem(y); %Σχεδιάζουμε την κρουστική απόκριση
xlabel('Time index n'); %Βάζουμε επιγραφή στον οριζόντιο άξονα
ylabel('Amplitude'); %Βάζουμε επιγραφή στον κατακόρυφο άξονα
title('Impulse Response'); %Βάζουμε τίτλο στην γραφική παράσταση
grid; %Βάζουμε <<πλέγμα>> στη γραφική παράσταση
```



Ερωτήσεις-Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε διαφορετικούς συντελεστές στα σήματα εισόδου και εξόδου με χρήση της εντολής **input**. Μεταβάλλεται η κρουστική απόκριση ή όχι; Ποια μορφή νομίζετε ότι είναι πιο επιθυμητή;
2. Θεωρείστε ένα σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y(n) - 2y(n-1) + 1,31y(n-2) - 0,28y(n-3) = u(n).$$

Σχεδιάστε την κρουστική απόκριση του παραπάνω συστήματος, τροποποιώντας κατάλληλα το αρχικό πρόγραμμα.

ΜΑΘΗΜΑ 10^ο

Ανάλυση χρονοδιακριτών-ψηφιακών και χρονοσυνεχών-αναλογικών LTI Σημάτων-Συστημάτων:

α) στο πεδίο του χρόνου, β) στο πεδίο της συχνότητας

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου επεξεργάζεται ένα σήμα εισόδου στο πεδίο του χρόνου για να δημιουργήσει ένα σήμα εξόδου με πιο επιθυμητές ιδιότητες.

Ένα αποτελεσματικό μαθηματικό μοντέλο (από άποψη υπολογισμών) για να εκφράσουμε την απόκριση ενός LTI συστήματος συναρτήσει των παρελθόντων τιμών της εξόδου μαζί με τις τρέχουσες και τις παρελθούσες τιμές της διέγερσης, είναι όπως έχουμε δει αυτό των γραμμικών εξισώσεων Διαφορών με Σταθερούς συντελεστές.

Η συμπεριφορά ενός LTI συστήματος μπορεί δηλαδή να περιγραφεί από μια Γραμμική Εξίσωση Διαφορών της μορφής:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r).$$

Επειδή συνήθως γίνεται κανονικοποίηση ως προς τον συντελεστή a_0 οι μορφές που θα συναντάμε έχουν ως εξής :

$$y(n) + \sum_{p=1}^N a_p y(n-p) = \sum_{l=0}^M b_l x(n-l).$$

Έχουμε ήδη γνωρίσει την κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος η οποία περιγράφει πλήρως το σύστημα. Μια αντίστοιχη περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας επίσης, μας την παρέχει η απόκριση συχνότητας η οποία δίνεται από τον λεγόμενο **Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DTFT)** της κρουστικής απόκρισης.

Έτσι αν $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier διέγερσης και απόκρισης αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{1 + \sum_{p=1}^N a_p e^{-j\omega p}}.$$

Η απόκριση συχνότητας είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας ω και είναι περιοδική με περίοδο 2π . Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας έχει μεγάλη σημασία για την ανάλυση των LTI συστημάτων. Μπορεί να εκφραστεί δε συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού μέρους αφού εν γένει είναι ένας μιγαδικός αριθμός:

$$H(e^{j\omega}) = H_{Re}(e^{j\omega}) + jH_{Im}(e^{j\omega}), \quad \text{ή συναρτήσει του πλάτους και της φάσης:}$$

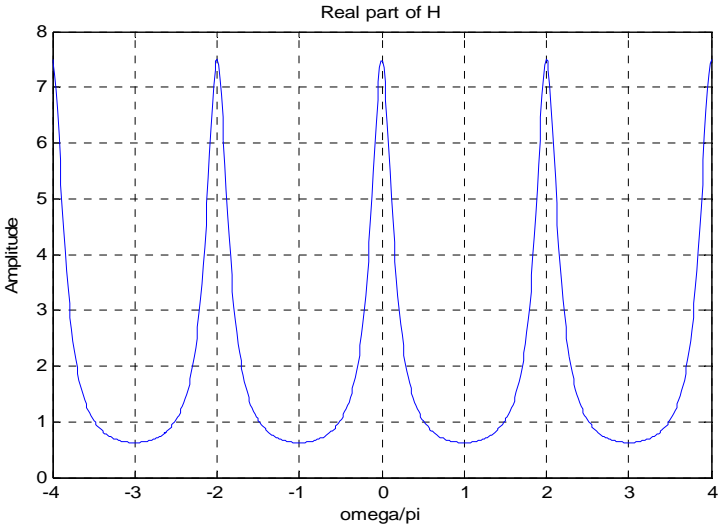
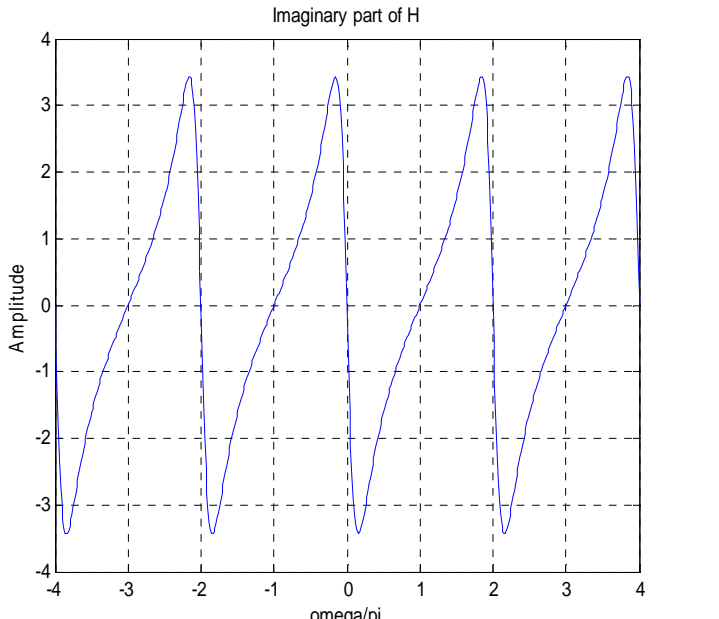
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi_n(\omega)}, \quad \text{όπου} \quad |H(e^{j\omega})|^2 = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega}) \quad \text{και}$$

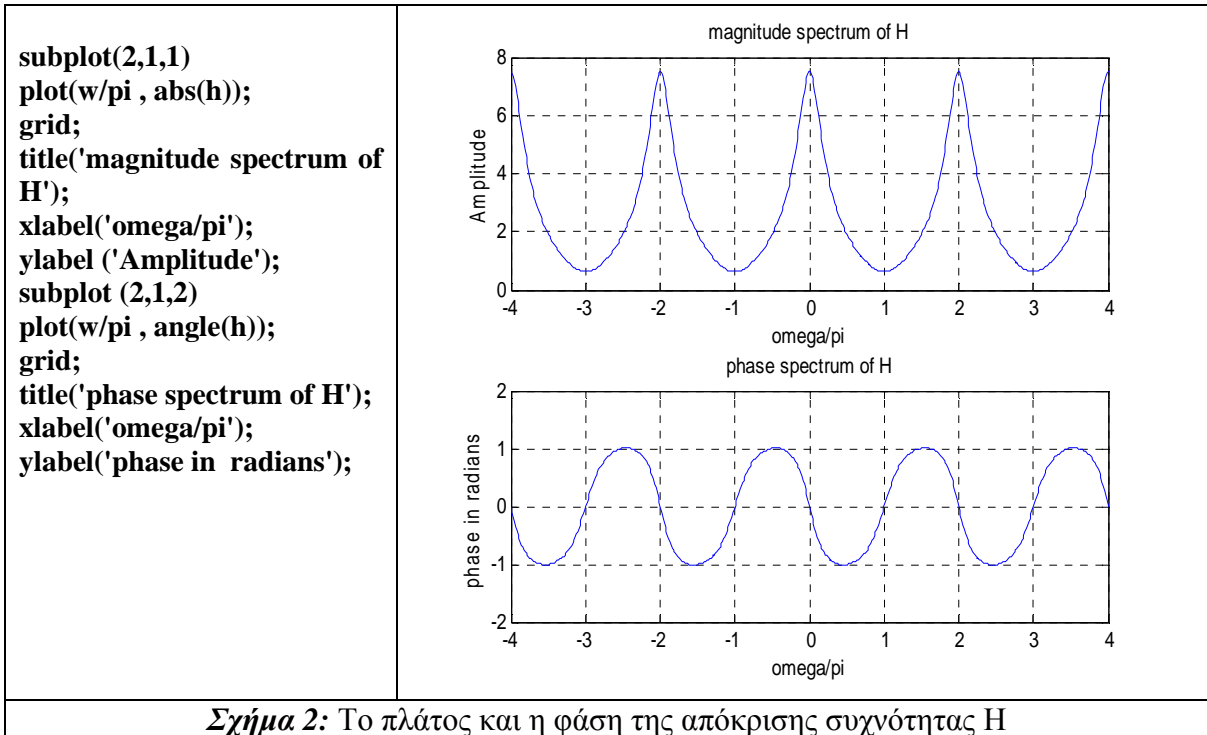
$$\varphi_n(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}.$$

Στο MATLAB θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **freqz(b,a,w)** όπου ο πίνακας **b** θα περιέχει τους συντελεστές b_l , ο **a** τους συντελεστές a_p και ο **w** θα μας προσδιορίζει την περιοχή συχνοτήτων που επιθυμούμε.

Παράδειγμα 1

Να γραφεί στον editor του MATLAB το παρακάτω πρόγραμμα

ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
<pre> clf; w=-4*pi:8*pi/511:4*pi; num=[2,1]; den=[1,-0.6]; h = freqz (num,den,w); plot(w/pi,real(h)); grid on; title('Real part of H'); xlabel('omega/pi'); ylabel('Amplitude') pause </pre>	
<pre> w=-4*pi:8*pi/511:4*pi; num=[2,1]; den=[1,-0.6]; h = freqz (num,den,w); plot (w/pi,imag(h)); grid on; title('Imaginary part of H'); xlabel('omega/pi'); ylabel('Amplitude') pause </pre>	
<p><i>Σχήμα 1:</i> Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της απόκρισης συχνότητας H</p>	

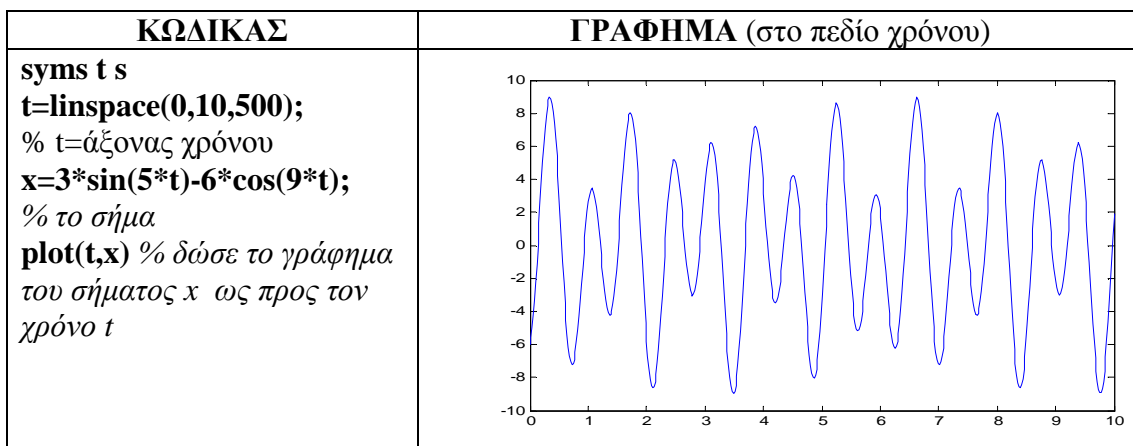


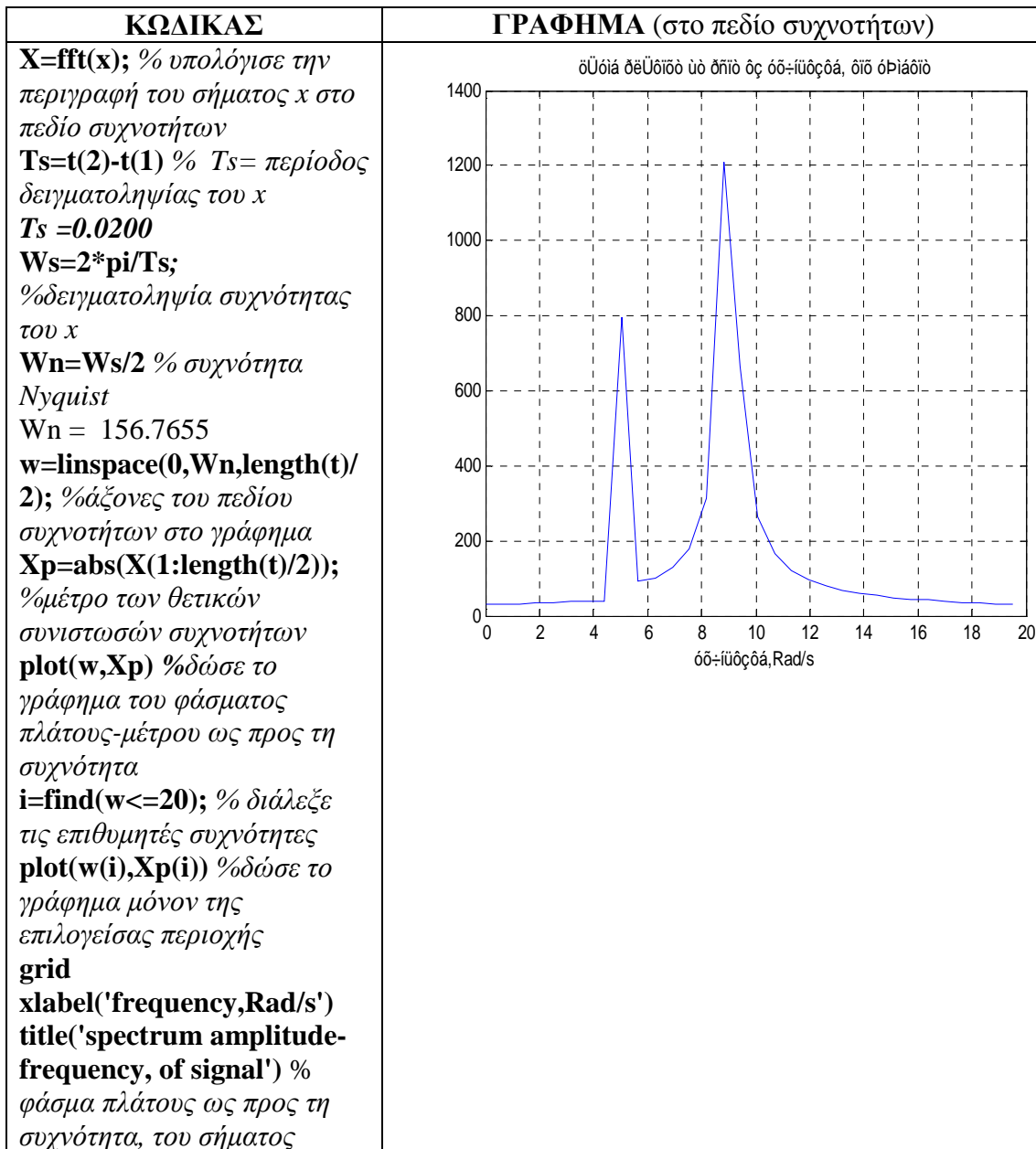
Ερωτήσεις-Ασκήσεις

1. Από ποια εξίσωση διαφορών περιγράφεται το σύστημα του οποίου την απόκριση συχνότητας βλέπετε;
2. Τροποποιήστε το πρόγραμμα ώστε να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας για το ακόλουθο σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών, όταν $0 \leq \omega \leq 3\pi$: $10y(n) - 5y(n-1) + y(n-2) = x(n) - 5x(n-1) + 10x(n-2)$.
3. Δώστε τις 4 γραφικές παραστάσεις που προαναφέραμε για το σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη απόκριση συχνότητας: $H(e^{j\omega}) = \frac{0,634 - 0,634e^{-j\omega}}{1 - 0,268e^{-j\omega}}$.

Παράδειγμα 2

Στην Ανάλυση Σημάτων (*Signals Analysis*), το MATLAB μπορεί να μελετά ένα σήμα στο πεδίο του χρόνου, αλλά και να αναλύει ένα σήμα ως προς τη συχνότητά του (ή φάσμα-spectrum), ή να κατασκευάζει και να σχεδιάζει φίλτρα. Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:





Σημαντική Παρατήρηση

Στο παραπάνω τελευταίο γράφημα - (φάσμα πλάτους ως προς τη συχνότητα, του σήματος x), παρατηρήστε ότι οι συχνότητες παρουσιάζουν εμφανή κορύφωση στα 5 και 9 Rad/sec του πεδίου συχνοτήτων, πράγμα που δεν διακρίνεται εύκολα στο αντίστοιχο πρώτο γράφημα του ίδιου σήματος x στο πεδίο του χρόνου.

Έτσι και από το παραπάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι στο πεδίο συχνοτήτων είναι συνήθως πιο "αποκαλυπτική" η ενδοσυμπεριφορά ενός Συστήματος, απ' ό,τι στο πεδίο του χρόνου. Για το λόγο ακριβώς αυτόν και είναι πολύ χρήσιμοι οι Γραμμικοί Μετασχηματισμοί ML-MF-MZ (ως μαθηματικά εργαλεία) στις Τεχνολογικές Εφαρμογές, ενώ παράλληλα μέσω των αντίστροφων μετασχηματισμών διευκολύνουν αποτελεσματικά την αμφίδρομη περιγραφή (Ανάλυση-Σύνθεση) των LTI-Συστημάτων μεταξύ των πεδίων του χρόνου και της συχνότητας.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑ (11ο και 12ο)

Σύντομη Ανασκόπηση όλων των προηγούμενων 10 μαθημάτων (Σύνοψη όλων των βασικών μαθηματικών πράξεων και εντολών)

1) Παραγωγή	2) Ολοκλήρωση	3) Σειρές Taylor, Mac-Laurin
<pre> » syms x a b c » f=(a*x^2+b*x+c-cos(x)) f=a*x^2+b*x+c-cos(x) » diff(f) % Παράγωγος της f ως προς x ans = 2*a*x+b+sin(x) » diff(f,a) % Παραγωγή της f ως προς a ans = x^2 » diff(f,2) % Δεύτερη παράγωγος της f ως προς x ans = 2*a+cos(x) » diff(f,a,2) % Δεύτερη παράγωγος της f ως προς a </pre>	<pre> » syms x y m n » f=3*x^2-2*y^3; » int(f) % αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x ans = x^3-2*y^3*x » int(f,y)% αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς y ans = 3*x^2*y-1/2*y^4 » int(f,1,pi) %ορισμένο ολοκλήρωμα της f ως προς x, από 1 μέχρι π ans = pi^3-1-2*y^3*(pi-1) int(f,y,1,pi)%ορισμένο ολοκλήρωμα της f ως προς y, από 1 μέχρι π ans = 3*x^2*(pi-1)-1/2*pi^4+1/2 » int(f,m,n) ans = n^3-m^3-2*y^3*(n-m) » int(f,y,m,n) ans = 3*x^2*(n-m)-1/2*n^4+1/2*m^4 </pre>	<pre> » syms x » f=exp(x); » taylor(f) ans = 1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/24*x^4+1/120*x^5 » pretty(ans) 2 3 4 5 1 + x + 1/2 x + 1/6 x + 1/24 x + 1/120 x » taylor(f,2) ans = 1+x » taylor(f,-2) ans = exp(-2)+exp(-2)*(x+2)+1/2*exp(-2)*(x+2)^2+1/6*exp(-2)*(x+2)^3+1/24*exp(-2)*(x+2)^4+1/120*exp(-2)*(x+2)^5 » pretty(ans) 2 3 exp(-2) + exp(-2) (x + 2) + 1/2 exp(-2) (x + 2) + 1/6 exp(-2) (x + 2) 4 5 + 1/24 exp(-2) (x + 2) + 1/120 exp(-2) (x + 2) » f=cos(x); » taylor(f) ans = 1-1/2*x^2+1/24*x^4 » f=sin(x); » taylor(f) ans = x-1/6*x^3+1/120*x^5 » pretty(ans) 3 5 x - 1/6 x + 1/120 x » taylor(f,-2) ans = -sin(2)+cos(2)*(x+2)+1/2*sin(2)*(x+2)^2-1/6*cos(2)*(x+2)^3-1/24*sin(2)*(x+2)^4+1/120*cos(2)*(x+2)^5 » taylor(f,2) ans = x </pre>

4) Πολυώνυμα	5) Πίνακες	
<pre> » syms x » f=x^4+3*x^3-15*x^2-2*x+9; » pretty(f) 4 3 2 x + 3 x - 15 x - 2 x + 9 » f1=[1 3 -15 -2 9] f1 = 1 3 -15 -2 9 » polyval(f1,2) % η τιμή του πολυωνύμου f γραμμένο στη μορφή πίνακα f1, για x=2 ans = -15 » roots(f1)% ρίζες του f1 ans = -5.5745 2.5836 0.7860 -0.7951 </pre>	<pre> » A=[1 2 3 4 5 6 7 8 9] » size(A) ans = 3 3 » A(2,1) %το στοιχείο της γραμμής 2 και της στήλης 1 ans = 4 » A(2,1)=0 %το στοιχείο της γραμμής 2 και της στήλης 1, να είναι 0 A = 1 2 3 0 5 6 7 8 9 » A*A ans = 22 36 42 42 73 84 70 126 150 » A^2 ans = 22 36 42 42 73 84 70 126 150 » A^3 ans = 316 560 660 630 1121 1320 1120 1970 2316 » A^0 ans = 1 0 0 0 1 0 0 0 1 » det(A) ans = -24 » det(A^0) ans = 1 ans = 0.1250 - 0.2500 0.1250 -1.7500 0.5000 0.2500 1.4583 -0.2500 -0.2083 » A' % ανάστροφος ans = 1 0 7 2 5 8 3 6 9 » A*(inv(A)) ans = 1.0000 0 0 -0.0000 1.0000 0 0 0 1.0000 B = -1.0000 0.3000 2.0000 -0.5000 7.0000 7.0000 1.0000 1.0000 0.6667 5.0000 6.0000 4.0000 » A*B </pre>	<pre> » 5*A ans = 5 10 15 0 25 30 35 40 45 » B=[-1 0.3 2 -0.5 7 7 1 1 2/3 5 6 2^2] » inv(A)% αντίστροφος (inverse) ans = 15.0000 29.3000 22.0000 13.5000 39.0000 65.0000 41.0000 29.0000 55.0000 103.1000 76.0000 40.5000 » B' ans = -1.0000 7.0000 0.6667 0.3000 7.0000 5.0000 2.0000 1.0000 6.0000 -0.5000 1.0000 4.0000 » size(B) ans = 3 4 » rank(A) ans = 3 » rank(B) ans = 3 » trace(A) ans = 15 » trace(B) ans = 12 » norm(A) ans = 16.0059 » norm(B) ans = 11.8228 » eig(A)% ιδιοτιμές- ιδιοδιανύσματα (eigenvalue- eigenvector) ans = -1.5440 1.0000 15.5440 » eig(B) </pre>

6) Λύση Γραμμικού	7) Μιγαδικοί Αριθμοί	8) Διαφορικές Εξισώσεις
<p>Συστήματος Εξισώσεων: {3x-2y=4, 7x+5y=19} » A=[3 -2 7 5] A = 3 -2 7 5 » B=[4 19] B = 4 19 » xy=inv(A)*B xy = 2.0000 1.0000</p>	<p>» z1=3-4i z1 = 3.0000 - 4.0000i » abs(z1) ans = 5 » angle(z1) ans = -0.9273 » angle(z1)*180/pi ans = -53.1301 » real(z1) ans = 3 » imag(z1) ans = -4 » conj(z1) ans = 3.0000 + 4.0000i » compass(z1) » feather(z1) » A=[1 2 3]+i*[-4 3 2] % Πίνακας 3 μιγαδικών αριθμών A = 1.0000 - 4.0000i 2.0000 + 3.0000i 3.0000 + 2.0000i » abs(A) ans = 4.1231 3.6056 3.6056 » angle(A)*180/pi ans = -75.9638 56.3099 33.6901 » compass(A) » feather(A) » » x=linspace(- 2*pi,2*pi); » z=1-i*2 z = 1.0000 - 2.0000i » plot(x,angle(z)) » plot(x,abs(z)) » z1=(1-i*2)*tan(x*pi);</p>	<p>» syms x y » y=dsolve('x^2*D2y+7*x*Dy+5*y=10- 4/x,y(1)=1,Dy(1)=0','x') y = 1/4*(8*x-4*log(x)+1)/x-5/4/x » pretty(y) $\frac{8x - 4 \log(x) + 1}{4x} - \frac{5}{4x}$ » y=dsolve('D2y+2*Dy+y=3*x*exp(- x),y(0)=4,Dy(0)=-2','x') y = 1/2*x^3*exp(-x)+4*exp(-x)+2*x*exp(-x) » pretty(y) $\frac{1}{2} x^3 \exp(-x) + 4 \exp(-x) + 2 x \exp(-x)$ » syms x y t » y=dsolve('D2y+2*Dy+y=3*t*exp(- t),y(0)=4,Dy(0)=-2','t') y = 1/2*t^3*exp(-t)+4*exp(-t)+2*t*exp(-t) » pretty(y) $\frac{1}{2} t^3 \exp(-t) + 4 \exp(-t) + 2 t \exp(-t)$ » y=simple(y) y = 1/2*exp(-t)*(t^3+8+4*t) » pretty(y) $\frac{1}{2} \exp(-t) (t^3 + 8 + 4 t)$ » y=dsolve('D2y+y=8*cos(t), y(0)=4,Dy(0)=-2','t') y = (4*sin(t)*cos(t)+4*t)*sin(t)- 4*sin(t)^2*cos(t)-2*sin(t)+4*cos(t) » y=dsolve('D2y+y=8*cos(t),y(0)=1,Dy(0)=- 1','t') y = (4*sin(t)*cos(t)+4*t)*sin(t)- 4*sin(t)^2*cos(t)-sin(t)+cos(t) » pretty(y) $(4 \sin(t) \cos(t) + 4 t) \sin(t) - 4 \sin(t) \cos(t) - \sin(t) + \cos(t)$</p>

	» plot(x,angle(z1)) » plot(x,abs(z1)) » plot(x,real(z)) » plot(x,real(z1)) » plot(x,imag(z1)) » plot(x,imag(z)) » compass(z) » compass(z1)	» y=simple(y) y = 4*sin(t)*t-sin(t)+cos(t) » pretty(y) 4 sin(t) t - sin(t) + cos(t) » ezplot(y) » ezplot(y,[-10,10])
--	---	--

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Έστω κύκλωμα R, L, C σε σειρά εναλλασσομένου ρεύματος. Να υπολογιστεί η εμπέδηση του κυκλώματος και η διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης και έντασης. Δίδονται R=120Ω, L=0,5H, C=100μF, f=50Hertz. Να σχεδιαστεί η εμπέδηση του κυκλώματος. Δίνεται ο τύπος: $Z = R + i(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, $\omega = 2\pi f$
- Δίνεται η εμπέδηση ενός κυκλώματος από τον παρακάτω τύπο:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$
 Να υπολογιστεί η Z_A όταν Z₁ = 12 Ω, Z₂ = (5-10j) Ω, Z₃ = (-10 + 10 j) Ω.
- Δίνονται οι τύποι μιγαδικών αριθμών σε εφαρμογή φυσικής:

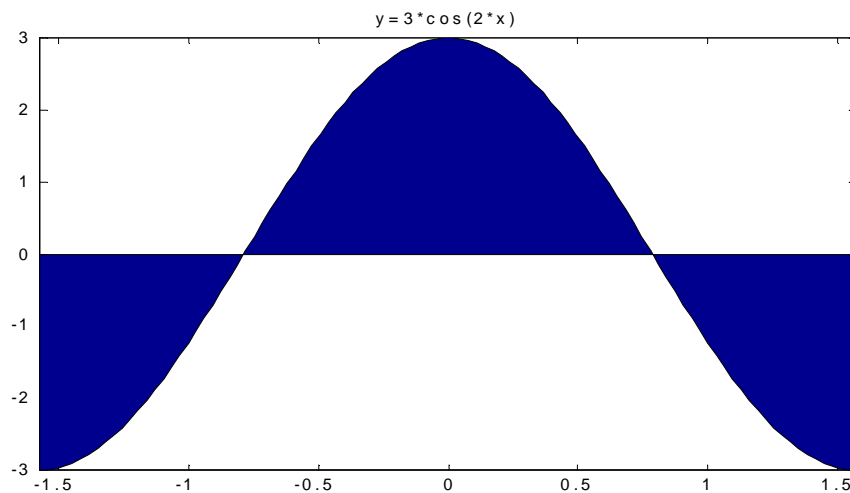
$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$
 όπου R = 25Ω, L = 5.10⁻³H, G = 80.10⁻⁶siemens, C = 0,04.10⁻⁶f, ω=2000π, βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς και σχεδιάστε τους.
- Να λυθεί το παρακάτω σύστημα, να υπολογιστούν οι μιγαδικοί αριθμοί και να παρασταθούν σε μιγαδικό επίπεδο συντεταγμένων.

$$\begin{bmatrix} 0,5\angle 48^\circ & -0,25\angle 0^\circ & 9\angle 50^\circ \\ 10\angle 10^\circ & 18\angle -22^\circ & 10\angle 30^\circ \\ 9\angle 62^\circ & 0,8\angle 12,3^\circ & 10,8\angle 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1\angle \phi_1 \\ z_2\angle \phi_2 \\ z_3\angle \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\angle 0^\circ \\ 12\angle -49^\circ \\ 23\angle -10^\circ \end{bmatrix}$$
- Σε ένα κύκλωμα R L C σε σειρά δίνονται R=20, L=0,1H, C=20mf και όλα είναι συνδεδεμένα με πηγή εναλλασσόμενης τάσης V=14ημ314t Volt. Υπολογίστε την εμπέδηση του κυκλώματος Z και την διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης V(t) και έντασης του ρεύματος I(t). Δίνονται οι παρακάτω τύποι: I(t)=I₀ημωt, V(t)=V₀ημ(ωt-θ(rad)), Z=I₀/V₀, Z=R+(Lω-1/Cω)i. Επίσης να σχεδιαστούν στον ίδιο πίνακα οι συναρτήσεις σημειώνοντας δίπλα σε κάθε γράφημα τον τίτλο της συνάρτησης.
- Να σχεδιαστεί σε τρισδιάστατο χώρο η ευθεία γραμμή με διανυσματική εξίσωση r(t)=(2t)i +(-10t)j+(-2+2t)k.
- Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα M=

$$\begin{bmatrix} U & -R & 0 \\ 0 & R - ix & -R \\ R & U & 2R - ix \end{bmatrix}$$

8. Να υπολογίσετε τις τιμές που μηδενίζουν τη ορίζουσα του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} t & \sin t \\ \cos t & 0 \end{bmatrix}$.
9. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = 1$.
10. Να λυθεί η εκθετική εξίσωση: $4(3^{2x+1}) + 17 \cdot (3)^x - 7 = 0$.
11. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{aligned} \log_y x &= 2 \\ 5y &= x + 12 \log_x y \end{aligned}$$
12. Να λυθεί η εξίσωση $P_L = \frac{100}{(10 + R_L)^2} R_L$. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση, δίνοντας τίτλο και χαρακτηρίζοντας τους άξονες.
13. Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x οι συναρτήσεις: $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^x}$ και $g = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
14. Να λυθεί η εξίσωση: $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.
15. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $F = 10 \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{2t}{RC}}$ ως προς τη μεταβλητή t .
16. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\int_{-5}^5 \frac{e^{-t} - e^t}{2} dt$.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f = x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2$
 $g = x^4 + x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 4$. Να υπολογισθούν τα παρακάτω: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g , $f(g(x))$, $g(f(x))$, οι πρώτοι παράγωγοι των συναρτήσεων f , g , οι ρίζες των, τα γραφήματά των, τα ακρότατά και τέλος τα σημεία καμπής των. Να επιβεβαιωθεί η μονοτονία των συναρτήσεων και τα ακρότατα γραφικά.
18. Θεωρώ τη διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση: $x(t) = A \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}} - \phi\right)$ είναι λύση της.
19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int \cos 10x \cdot \cos 30x dx$
 $\int_1^2 \frac{(2x+1) \cdot (3x+4)}{x} dx$ $\int x^4 \cdot \ln x dx$
 $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx$ 3. $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx$ (Σημ. Στην περίπτωση 2 και 3 m, n είναι φυσικοί αριθμοί και $m \neq n$).
20. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της τάσης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $V(t) = 340 \cdot \sin 2t$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

21. Να βρεθεί το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα (σε μοίρες) του μιγαδικού αριθμού $z = \frac{2}{(1+j)^4}$ και να σχεδιαστεί στο μιγαδικό επίπεδο. Το γράφημα επαληθεύει τις τιμές που βρήκατε;
22. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $I(t) = I_0 \cdot \sin 100\pi t$ στο διάστημα $[0, 10\text{ms}]$ γνωρίζοντας ότι η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή 30A. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη συνάρτηση σε καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.
23. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου (Ω) που δημιουργεί η συνάρτηση $y(x) = 5x - x^2$ με τον άξονα $x'x$. Σχεδιάστε τη συνάρτηση και υποδείξτε το ζητούμενο χωρίο.
24. Να αποδείξετε γραφικά την προσέγγιση της e^x από τη συνάρτηση: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ που είναι η ανάπτυξή της σε σειρά Taylor.
25. Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν που ορίζεται από τη συνάρτηση και τον άξονα $\chi\chi'$.



26. Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα στον πρόγραμμα και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα

$$\int_{-1}^1 -\frac{3}{4}t^2 dt \quad \int_0^1 3e^{3t} dt$$

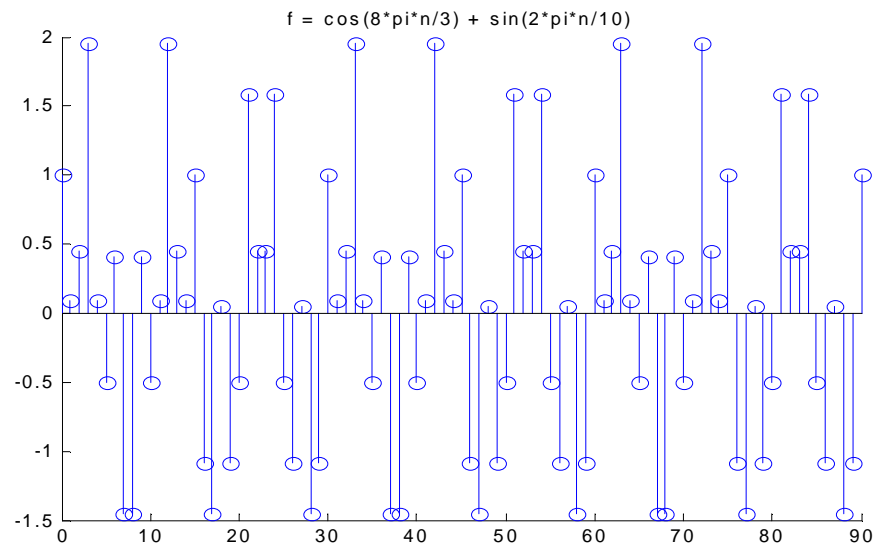
$$\int_1^4 \frac{3}{4u} du \quad \int_4^8 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}} \quad \int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$$

27. Να αποδείξετε ότι: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\eta \cdot x) dx = \pi$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\eta \cdot x) dx = \pi$, όπου η ακέραιος.

28. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $\int_0^R e^{-sx} x^2 dx$ $\int_0^R e^{-sx} \sin(ax) dx$

29. Να λυθεί η δ.ε. με δύο τρόπους: $y'' + 4y = 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες της είναι $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. Να επαληθεύσετε τη λύση της και να τη σχεδιάσετε σε καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.

30. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης παλμού $f(t) = \begin{cases} 2, & |t| \leq 10 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$. Να σχεδιασθεί η $F\{f(t)\}$. Να υπολογισθεί η τιμή της όταν $\omega \rightarrow 0$.
31. Δίδεται η περιοδική συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x < 0 \\ 5, & 0 < x < 4 \end{cases}$ Η συνάρτηση αυτή έχει αναλυθεί σε σειρά Fourier ως εξής: $f(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi x}{8} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi x}{8} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi x}{8} + \dots \right)$. Ποια είναι η θεμελιώδης συχνότητά της και ποιες είναι οι αρμονικές της συνιστώσες; Να σχεδιάσετε στο MATLAB το φάσμα συχνοτήτων της $f(x)$.
32. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση: $y' + y = \sin(t)$, $y(0) = 1$ με δύο τρόπους.
33. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 5 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$ με τη βοήθεια του βασικού τυπολογίου. Να σχεδιασθεί η συνάρτηση $f(t)$ στο χαρτί και ο μετασχηματισμός της ($F\{f(t)\}$) στο πρόγραμμα. Να δικαιολογήσετε με όποιο τρόπο μπορείτε την τιμή της $F\{f(t)\}$ όταν $\omega \rightarrow 0$.
34. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το σήμα $f = \cos(8\pi n/3) + \sin(2\pi n/10)$. Να χαρακτηρίσετε το σήμα (χρονοσυνεχές/χρονοδιακριτό, πραγματικό/μιγαδικό, περιοδικό/μη περιοδικό). Στην περίπτωση που αποτελεί περιοδικό σήμα να υπολογίσετε την περίοδό του. ($N=N1N2/MΚΔ(N1,N2)$)



35. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\frac{s^2 + 6s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$
36. Έστω η συνάρτηση $g(t) = \cos(1000\pi t)$. (α) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης. (β). Να γίνει ένα πρόχειρο γράφημά της $g(t)$ και της $G(\omega)$, όπου $G(\omega) = F\{g(t)\}$. Τι παρατηρείτε;
37. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων.
 $L\{5e^{-3t} - 6\cos(5t) + 10\sin(4t) - 12t^6\}$

38. Δίδεται η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < \frac{-\pi}{2} \\ 1, & \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$ Να γίνει η γραφική παράσταση

της συνάρτησης. Να ελέγχει αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 4 όροι της.

39. Να χαρακτηρίσετε τα είδη και τη κατηγορία των σημάτων των οποίων οι μαθηματικοί τύποι σαν δίνονται παρακάτω. Να εξετάσετε την περιοδικότητά τους. Στην περίπτωση που αποτελούν περιοδικά σήματα να υπολογίσετε την περίοδό τους. Να σχεδιάσετε το κάθε σήμα στο πρόγραμμα MATLAB χρησιμοποιώντας κατάλληλο πεδίο ορισμού σχεδίασης.

$$f_1(t) = 2 + \sin(5\pi t - \pi/6) + 12\cos(20\pi t + \pi/3) - 4\sin(15\pi t + \pi/6)$$

$$f_2(t) = \sin(\pi t - \pi/6) - \sin(2\pi t + \pi/3) + 0.5\cos(6\pi t)$$

$$f_3(t) = 3\sin(2t - \pi/6) + 12\cos(9\pi t + \pi/3)$$

$$f_4(t) = 3\sin(t - \pi/6) + 12\cos(10\pi t + \pi/3) - 4 + 6\cos(5\pi t)$$

$$f_5(n) = -3\sin(5\pi n) + 12\cos(20\pi n) - 4\sin(15\pi n + \pi/6)$$

$$f_6(n) = \sin(100\pi n - \pi/6) + 12\cos(120\pi n)$$

$$f_7(t) = \cos(\pi n - \pi/6) + 12\cos(20n + \pi/3)$$

$$f_8(t) = \text{real}(12 e^{20\pi i t})$$

$$f_9(t) = \text{imag}(12 e^{20\pi i t})$$

$$f_{10}(t) = \text{real}(e^{120\pi i t}) + \text{imag}(e^{120\pi i t})$$

40. Να υπολογισθεί η μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ως προς x στα σημεία $(2,1)$ και $(-2,1)$ και να δείξετε τι εκφράζει στο γράφημα της συνάρτησης που θα σχεδιάσετε στο MATLAB.

41. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = 4/3x^3 + 4xy^3 - 4x^2 - 4y^2 + 1$. Να υπολογιστούν τα ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης και αν επαληθευτούν στο γράφημα της

42. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\iint_{\Omega} 3x^2y^2 dx dy$ στην περιοχή ολοκλήρωσης $\Omega: y = |x|, y = -|x|, x \in [-1,1]$.

43. Έστω ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη Δ.Ε $y'(t) + a \cdot y(t) = x(t)$ Όπου $x(t)$ και $y(t)$ η συνάρτηση εισόδου και εξόδου αντίστοιχα του συστήματος. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.

44. Έστω ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη Δ.Ε $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = x'(t) + 5x(t)$ Όπου $x(t)$ και $y(t)$ η συνάρτηση εισόδου και εξόδου αντίστοιχα του συστήματος. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.

45. Να λυθεί η διαφοροεξίσωση $y(k+2) - y(k+1) + 6y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, όταν $y(0) = y(1) = 0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

MATLAB για Μηχανικούς, Ευάγγελου Β. Χατζίκου, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσ/κη (2013).

Γενικά Μαθηματικά, Ayres F., Μετάφραση: Σ. Περσίδης & Χ. Τερζίδης. ΕΣΠΙ, Αθήνα .

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE, FOURIER, ΖΗΤΑ (ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Εφαρμογές στα Σήματα-Συστήματα), Ι. Θεοδώρου, Ν. Γαγαλής, Π. Κικίλιας κ.α., Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα (2001).

ΑΓΓΛΙΚΗ

Part-Enander Eva, Sjoberg Anders, Melin Bo, Isaksson Pernilla, *THE MATLAB HANDBOOK*, ADDISON-WESLEY, Uppsala University-Sweden.

Bird, J., *Engineering Mathematics*. Newness: Oxford.

James, G., *Modern Engineering Mathematics*. Addison – Wesley: Harlow.

Libbey, R., *Handbook of Circuit Mathematics for Technical Engineers*. CRC Press: Boston.

Muotoe, L. & Barry, M., *Mathematics in Engineering and Science*. I. Wiley & Sons Ltd.: Baffins Lane.

Salas, S. & Hille E. , *Calculus one and Several Variables*. J. Wiley and Sons.(Eds.): New York.

The Student Edition of MATLAB. , Prentice Hall: Englewood Cliffs.

Zill, D. , *Calculus*. PWS Publishing Company: Boston.