Ν. ΓΑΓΑΛΗΣ Ι. ΘΕΟΔΩΡΟΥ Π. ΚΙΚΙΛΙΑΣ
Φ. ΚΟΜΙΣΟΠΟΥΛΟΣ Μ. ΛΑΜΠΙΡΗΣ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ
Laplace, Fourier, Ζήτα
(Εφαρμογές στα Σήματα - Συστήματα)

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΔΗΡΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α
ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE
2. Γραμμικοί – Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ
ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER – (Α΄ μέρος)
ΣΕΙΡΕΣ FOURIER
3. Ανάλυση Fourier – (Α΄ μέρος) Σειρές Fourier

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ
ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER - (Β' μέρος)
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΖΗΤΑ

……………………………………………………..

…………………………………………………….

1.6. Βασικά Σήματα

1.6.1. Περιοδικά Σήματα

Επειδή πολλά φαινόμενα του φυσικού και τεχνολογικού κόσμου που περιβάλλει και ενδιαφέρει τον άνθρωπο, εμπεριέχουν την έννοια της περιοδικότητας, όπως π.χ της καθημερινής ανατολής και δύσης του ήλιου, των 4 εποχών του έτους, των κύκλων του φεγγαριού, της καρδιακής λειτουργίας, της μηχανικής λειτουργίας ενός αυτοκινήτου ή αεροπλάνου, κτλ, έτσι και μια πολύ σημαντική κατηγορία σημάτων (που εκφράζουν τέτοια περιοδικά ή κυκλικά φαινόμενα) είναι τα λεγόμενα ***Περιοδικά Σήματα***.

Οπότε (κατ'αντιστοιχία με τον γνωστό ορισμό μιας περιοδικής συνάρτησης στα Μαθηματικά), έχουμε:
Ονομάζουμε περιοδικό ένα χρονοσυνεχές σήμα $f(t)$, με περίοδο *T*, όταν υπάρχει σταθερός πραγματικός αριθμός $T \neq 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\boxed{f(t) = f(t+T), \quad t \in \mathbb{R}} \quad \textbf{(1).}$$

Με άλλα λόγια, ένα χρονοσυνεχές σήμα-συνάρτηση είναι περιοδικό, όταν παραμένει αμετάβλητο σε μια μετακίνηση-πήδημα του χρόνου κατά *T*.

Ο αριθμός *T* λέγεται *Περίοδος του Σήματος*, ενώ ο ελάχιστος θετικός αριθμός *T* που ικανοποιεί την (1) λέγεται *θεμελιώδης (ή αρχική) περίοδος* – συνήθως λέγοντας περίοδο ενός σήματος εννοούμε την θεμελιώδη του περίοδο.
Προφανώς ισχύει, $f(t) = f(t+\kappa T), \forall \kappa \in Z^*$, δηλ. η (1) ισχύει για κάθε ακέραιο κ, που σημαίνει ότι το σήμα $f(t)$ έχει γενικά άπειρες περιόδους $(\pm T, \pm 2T, \pm 3T, ...)$.

Ανάλογα, λέμε ότι ένα χρονοδιακριτό σήμα $x(n)$, ($n \in Z$), είναι περιοδικό με περίοδο *N*, όταν υπάρχει ακέραιος αριθμός $N \neq 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\boxed{x(n) = x(n+N), \quad n \in \mathbb{Z}} \quad \textbf{(2).}$$

(Με άλλα λόγια, ότι ένα χρονοδιακριτό σήμα (ακολουθία) είναι περιοδικό, όταν επαναλαμβάνει τον εαυτό του κάθε φορά που συμπληρώνει *N* τιμές – δείγματα).

Προφανώς και εδώ, το $x(n)$ έχει γενικά άπειρες περιόδους, $(\pm N, \pm 2N \pm 3N, ...)$, ενώ λέμε αρχική ή θεμελιώδη περίοδο, την ελάχιστη θετική τιμή του *N*, για την οποία ισχύει η σχέση (2). Ας σημειωθεί ότι η περίοδος ενός χρονοδιακριτού σήματος (ακολουθίας) είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός.

Παρατηρήσεις :

Α) Κάθε περιοδικό σήμα έχει θεμελιώδη περίοδο Τ, εκτός του σταθερού σήματος $f(t) = C$, που έχει απροσδιόριστη θεμελιώδη περίοδο ή αλλιώς έχει θεμελιώδη περίοδο οποιονδήποτε θετικό αριθμό.

Π.χ. η γνωστή συνάρτηση – σήμα του Dirichlet

$$f(t) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ t\ \rho\eta\tau o\varsigma\ (t \in Q), (I) \\ \\ 1, \alpha\nu\ t\ \alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma\ (t \in A), (II) \end{cases}$$

αποδεικνύεται ότι δεν έχει περίοδο αφού πράγματι: για να ισχύει η (Ι), με $t \in Q$ θα πρέπει και $T \in Q$, ώστε $(t+T) \in Q$, ενώ για την (ΙΙ) με $t \in A$ θα πρέπει πάλι $T \in Q$, ώστε $(t+T) \in A$, (δεδομένου ότι: ρητος+ρητος=ρητος, και αρρητος+ρητος=αρρητος). Άρα, και στις 2 περιπτώσεις αρκεί $T \in Q$ οπότε οποιοσδήποτε ρητός αριθμός ($\neq 0$) είναι περίοδος της $f(t)$. Επομένως, η συνάρτηση του Dirichlet δεν έχει αρχική περίοδο. (Σχετικά ισχύει: κάθε περιοδική συνάρτηση – σήμα $f(t)$, ή θα έχει θεμελιώδη περίοδο Τ και όλες οι άλλες περίοδοι της θα είναι ακέραια πολλαπλάσια της Τ ($\kappa T, \kappa \in Z^*$), ή θα έχει οποιαδήποτε σταθερά (>0), ως θεμελιώδη περίοδο).

Β) Αν Τ είναι η θεμελιώδης περίοδος ενός σήματος $f(t)$, τότε (όπως είδαμε κάθε αριθμός $\kappa T, (\kappa \in Z^*)$, είναι περίοδος του $f(t)$.

Γ) Αν ένα σήμα $f(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο Τ, τότε και η $f(at)$, με $a \in R^*$, είναι περιοδικό σήμα με περίοδο Τ/α.

1.6.2. Χρονοσυνεχή Περιοδικά, Ημιτονοειδή και Μιγαδικά – Εκθετικά Σήματα

Α) Χρονοσυνεχή Ημιτονοειδή Περιοδικά Σήματα

Μια σημαντικότατη οικογένεια περιοδικών Σημάτων (συναρτήσεων), είναι τα ημιτονοειδή (ή τα αρμονικά) σήματα, που ως γνωστόν είναι της μορφής : $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ή $f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, **(3)**.

Τα ημιτονοειδή σήματα (συναρτήσεις), έχουν πολλές και καλά γνωστές ιδιότητες, με εύκολα (σχετικά) προσδιορίσιμα χαρακτηριστικά, γι'αυτό και αποτελούν τη βάση για την ανάλυση και εξέταση πολλών άλλων ποίο σύνθετων ή πιο «δύσκολων» σημάτων (Ανάλυση Fourier, κλπ).

Υπενθυμίζουμε σχετικά ότι:

Α) Τα ημιτονοειδή σήματα (συναρτήσεις) έχουν περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$, (που εκφράζεται σε sec), ή αλλιώς έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, (που εκφράζεται σε rad/sec), είτε τέλος ότι έχουν συχνότητα (ή φυσική συχνότητα) $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ ή $\omega = 2\pi\nu$, (όπου ν εκφράζεται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο (c/sec) ή σε Hertz (Hz)).

Β) Έχουν πλάτος $|A|$, που εκφράζει τη μέγιστη τιμή του σήματος.

Γ) Έχουν φάση ($\omega t+\varphi$), όπου φ η τιμή της φάσης για $t=0$ (γι’αυτό και λέγεται αρχική φάση).

Δ) Το γράφημα τους είναι η γνωστή ημιτονοειδής καμπύλη (αρμονικό κύμα), ενώ το γράφημα τους σε μια περίοδο Τ λέγεται και κύμα ή κυματομορφή.

Ε) <u>**Ισχύουν οι προτάσεις:**</u>

Ε1) Τα αθροίσματα 2 ή περισσότερων ημιτονοειδών (αρμονικών) σημάτων με την ίδια περίοδο Τ (κυκλική συχνότητα ω), είναι επίσης ημιτονοειδές σήμα με την ίδια περίοδο Τ (κυκλική συχνότητα ω).

Ε2) Τα αθροίσματα ημιτονοειδών σημάτων, που η κυκλική συχνότητα του καθενός είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της κυκλικής συχνότητας ω_0 ενός εξ’αυτων, είναι επίσης περιοδικό σήμα – γενικά μη ημιτονοειδές – με κυκλική συχνότητα ω_0. Π.χ το σήμα $f(t)=\sin(2t)-3\cos(4t)-2\cos(6t-5)$, είναι περιοδικό με κυκλική συχνότητα $\omega=\omega_0=2$, ή $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

Ε3) Το άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων είναι περιοδικό σήμα – γενικά μη ημιτονοειδές-, εάν και μόνο εάν ισχύει: οι κυκλικές συχνότητες τους ανά δυο, έχουν λόγους ρητό αριθμό, (δηλ. τα ημιτονοειδή σήματα $f_1(t)=A_1\cdot\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$ και $f_2(t)=A_2\cdot\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$, θα έχουν άθροισμα περιοδικό σήμα αν και μόνο αν: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{\kappa}{\lambda}=$ ρητός αριθμός, $(\kappa,\lambda\in Z^*)$.

Είτε αλλιώς, ισοδύναμα: Το άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων (συναρτήσεων), έστω $f(t)=A_1\cdot\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cdot\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+......$ είναι περιοδικό σήμα (γενικά μη ημιτονοειδές), αν και μόνο αν, υπάρχουν $\kappa_1,\kappa_2,.....\in Z^*$,τέτοια ώστε: $\kappa_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=\kappa_2=\dfrac{2\pi}{\omega_2}=....=T$.

<u>Π.χ</u>

Ι) Το σήμα $f(t)=6\sin(\frac{1}{3}t-2)-7\cos(\frac{1}{4}t+5)$, είναι περιοδικό, αφού (Ε3), $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{1/3}{1/4}=\dfrac{4}{3}\in Q^*$ και μάλιστα έχει περίοδο: $T=\kappa_1\dfrac{2\pi}{\omega_1}=\kappa_2\dfrac{2\pi}{\omega_2}$ ή $T=\kappa_1\dfrac{2\pi}{1/3}=\kappa_2\dfrac{2\pi}{1/4}$ ή ή $T = 6\kappa_1\pi = 8\kappa_2\pi$, οπότε $\dfrac{\kappa_1}{\kappa_2} = \dfrac{8\pi}{6\pi} = \dfrac{4}{3}$, άρα $t = 6 \cdot 4 \cdot \pi = 24\pi$, (δηλ. κυκλική συχνότητα $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{24\pi} = \dfrac{1}{12}$).

II) Αντίθετα το σήμα $g(t) = \cos(3t) - \sin(\pi t)$, δεν είναι περιοδικό αφού κατά την πρόταση (Ε3) έχουμε $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{3}{\pi} \notin Q^*$.

III) Το σήμα $f(t) = 7 + \sin t - \cos t - 3\cos(2t) + 4\sin(4t - 2)$ είναι περιοδικό, με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ (ή $\omega_0 = 1$), διότι: είναι άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων και του σταθερού σήματος 7 (που ως γνωστό κάθε σταθερό σήμα, μπορεί να θεωρηθεί περιοδικό με περίοδο οποιοδήποτε αριθμό ($\neq 0$)) Επίσης το $\sin t$ έχει κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 1$(ή $T = 2\pi$), όπως και το $\cos t$, ενώ οι άλλοι προσθετέοι ($-3\cos(2t)$) και ($4\sin(4t - 2)$) έχουν κυκλικές συχνότητες 2 και 4 αντίστοιχα, δηλ. πολλαπλάσια της $\omega_0 = 1$.

άρα και το άθροισμα τους, δηλ. το σήμα $f(t)$ σύμφωνα με την (Ε2), θα είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 2\pi$ (ή $\omega_0 = 1$).

IV) Το σήμα $f(t) = 3\sin(2t) - \cos(7t + 1)$, είναι περιοδικό, αφού κατά την πρόταση (Ε3), είναι: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{2}{7} \in Q^*$, με $T = \kappa_1 \dfrac{2\pi}{2} = \kappa_2 \dfrac{2\pi}{7}$ ή $T = \kappa_1\pi = \dfrac{2}{7}\kappa_2\pi \Rightarrow \dfrac{\kappa_1}{\kappa_2} = \dfrac{2}{7}$, άρα $T = 2\pi$ (ή $\omega_0 = 1$).

Β) Χρονοσυνεχή Μιγαδικά – Εκθετικά Περιοδικά Σήματα

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των Ημιτονοειδών Σημάτων (συναρτήσεις) στην οποία και οφείλουν την τεραστία χρησιμότητα τους σε πολλά πεδία εφαρμογών (εκτός από το ότι είναι οι βασικότερες περιοδικές συναρτήσεις – σήματα), είναι ότι σχετίζονται άμεσα με τους μιγαδικούς αριθμούς, ,μέσω της γνωστής σχέσης του Euler:

$$\boxed{e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)}, \qquad (4)$$

Με αλλά λόγια, τα ημιτονοειδή σήματα μέσω της σχέσης (4) που γράφονται και $e^{j2\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) + j \cdot \sin(2\pi\nu t)$ **(4 α)** (αφού $\omega = 2\pi\nu$), κατορθώνουν να συνδέουν τους πιο αξιοσημείωτους υπερβατικούς αριθμούς π και e, με τους μιγαδικούς αριθμούς (ως γνωστό: $e^{2\pi j} = 1, j = \sqrt{-1}$), μια σύνδεση ιστορικής επιστημονικής σημασίας, αφού υπήρξε το θεωρητικό έναυσμα (ανάλυση Fourier, ανάλυση κυκλωμάτων, κλπ) για πολλές από τις σύγχρονες τεχνολογικές αποκαλύψεις.

Έτσι, τα ημιτονοειδή (χρονοσυνεχή αλλά και χρονοδιακριτά) περιοδικά σήματα, σχετίζονται άμεσα με τα αντίστοιχα μιγαδικά – εκθετικά περιοδικά σήματα, μια αλληλουχία που επιτρέπει συχνά την αλληλοσυμπλήρωση τους, με συνέπεια να διευκολύνεται δυναμικά ο χειρισμός πολλών σχετικών προβλημάτων των εφαρμογών, (ως γνωστόν π.χ. μια σύνθετη αντίσταση ενός απλού ηλεκτρικού κυκλώματος εκφράζεται συνήθως μέσω μιγαδικών αριθμών, ενώ η Ανάλυση Fourier βασίζεται στα ημιτονοειδή σήματα).

[Υπενθυμίζεται σχετικά από τους μιγαδικούς ότι: κάθε μιγαδικός αριθμός $Z \in C$, μπορεί να γράφει στις εξής ισοδύναμες μορφές:

$z = \alpha + \beta i$, (αλγεβρική μορφή), **(4β)**

$z = (\alpha, \beta)$, (διατεταγμένο ζεύγος),

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$, (τριγωνομετρική μορφή),

$z = |z| \cdot \angle z$, (πολική μορφή),

$z = |z| \cdot e^{j\varphi}$, (εκθετική μορφή),

όπου το μέτρο του z είναι, $|z| = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

και το πρωτεύον όρισμα φ (φάσορας) είναι

$$\varphi = Argz = \angle z \in (-\pi, \pi], \quad \text{με} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

Επίσης, ισοδύναμα με την (4), ισχύουν οι γνωστοί ***τύποι του Euler:***

$$\left.\begin{cases} \cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \\ \\ \sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}\right\} \quad \textbf{(4β)}$$

Εξάλλου, $e^{z=\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + j\sin\beta)$, **(4γ),** $z^{w} = e^{w\cdot\ln z}$, **(4δ)**, (δηλ. $(\alpha+\beta i)^{(\gamma+\delta i)} = e^{w\cdot\ln z} = e^{(\gamma+\delta i)\cdot(\ln|z|+j\cdot Argz)}$). Τέλος, $e^{2\pi j} = 1, e^{\pi j} = -1, j^{j} = e^{-\pi/2}$].

Ας εξετάσουμε τώρα, αν ένα χρονοσυνεχές Μιγαδικό – Εκθετικό σήμα, είναι περιοδικό: Έστω λοιπόν, $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ **(5)**, οπότε σύμφωνα με την (1) θα πρέπει να ισχύει: $f(t) = f(t+T), (\forall t)$, δηλ. $e^{j\omega_o t} = e^{j\omega_0(t+T)}$ ή $e^{j\omega_o t} = e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\omega_0 T}$ ή $e^{j\omega_0 T} = 1$ **(6)**.

οπότε: αν $\omega_0 = 0$, τότε $f(t) = 1$, άρα το σήμα είναι σταθερό και επομένως είναι περιοδικό για κάθε τιμή του $T \neq 0$. Ενώ, αν $\omega_0 \neq 0$, τότε η θεμελιώδης περίοδος T_0 του $f(t)$ - που είναι η μικρότερη θετική τιμή του T για την οποία ισχύει η (6)- είναι :

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad \textbf{,(7),} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Αφού } e^{j\omega_0 T} = 1 = \cos(\omega_0 T) + j\cdot\sin(\omega_0 T) <=> \\ \cos(2\kappa\pi) + j\cdot\sin(2\kappa\pi) = 1 <=> 2\kappa\pi = \omega_0 T <=> \\ <=> T = \dfrac{2\kappa\pi}{\omega_0} \xrightarrow[(\kappa=1)]{(T_0=T_{\min}>0)} T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|} \end{array}\right.$$

άρα, το χρονοσυνεχές Μιγαδικό – Εκθετικό σήμα $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ είναι περιοδικό με την ίδια μάλιστα θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ όπως και τα αντίστοιχα ημιτονοειδή σήματα της σχέσης Euler, δηλ. $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\cdot\sin(\omega_0 t)$,απ’την οποία μπορούμε προφανώς να πάρουμε:

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 t) = \mathrm{Re}\{e^{j\omega_0 t}\} \\ \\ \sin(\omega_0 t) = \mathrm{Im}\{e^{j\omega_0 t}\} \end{cases} \quad \textbf{,(8)}$$

1.6.3. Παρατηρήσεις – Συμπεράσματα (στα Χρονοσυνεχή περιοδικά – Ημιτονοειδή και Εκθετικά Μιγαδικά – Σήματα)

Α) Τα χρονοσυνεχή ημιτονοειδή σήματα, δηλαδή τα $f_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $f_2(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ είναι περιοδικά με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}(\sec)$, ή με θεμελιώδη (κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}(\dfrac{rad}{\sec})$ και (φυσική) συχνότητα $v = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}(\dfrac{cycles}{\sec}$ ή Hz), ή $\omega_0 = 2\pi v$. Μέσω της σχέσης του Euler (γενική μορφή της (4)):

$$Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\cdot A\sin(\omega_0 t+\varphi), \qquad \textbf{(9α)}$$

$$Ae^{-j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t+\varphi) - j\cdot A\sin(\omega_0 t+\varphi), \qquad \textbf{(9β)}$$

παίρνουμε (τα ημιτονοειδή σήματα εκφρασμένα σε μιγαδική μορφή):

$$A\cos(\omega_0 t+\varphi) = \frac{A}{2}(e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega_0 t}), \text{ [(9 α)+(9β)]}$$

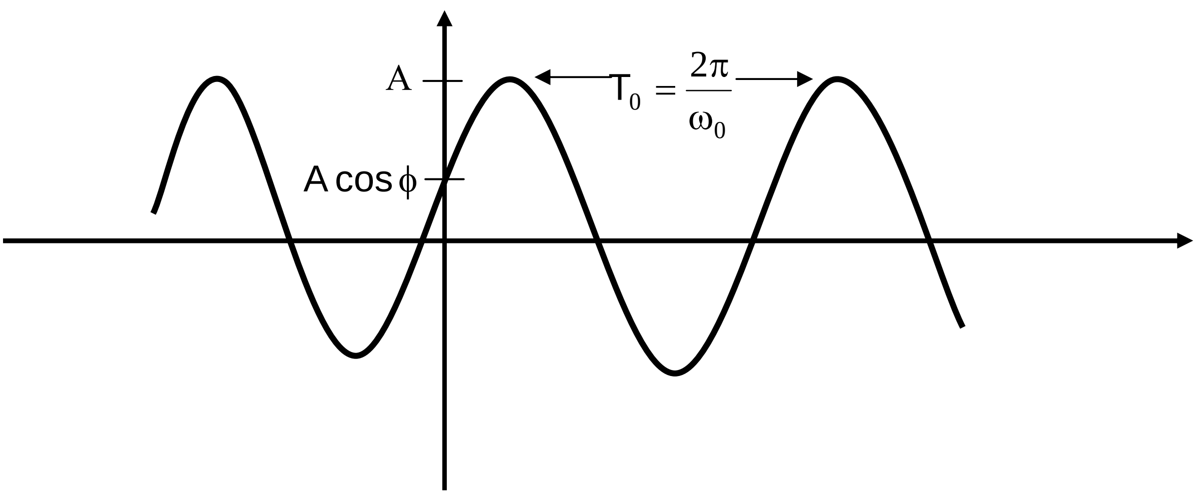
$$A\sin(\omega_0 t+\varphi) = \frac{A}{2j}(e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 t} - e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega_0 t}), \text{ [(9 α)-(9β)]}$$

Τέλος, ανάλογα με τις σχέσεις (8), έχουμε:

$$A\cos(\omega_0 t+\varphi) = A\cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right\},\ A\sin(\omega_0 t+t) = A\cdot \mathrm{Im}\left\{e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right\}, \textbf{(10)}$$

(όπου η ποσότητα $C = Ae^{j\varphi}$, λέγεται (τεχνικά) και “φάσορας”).

(στο παρακάτω Σχήμα 1.6.3(α) δίνεται το γράφημα του χρονοσυνεχούς ημιτονοειδούς σήματος $f(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$)



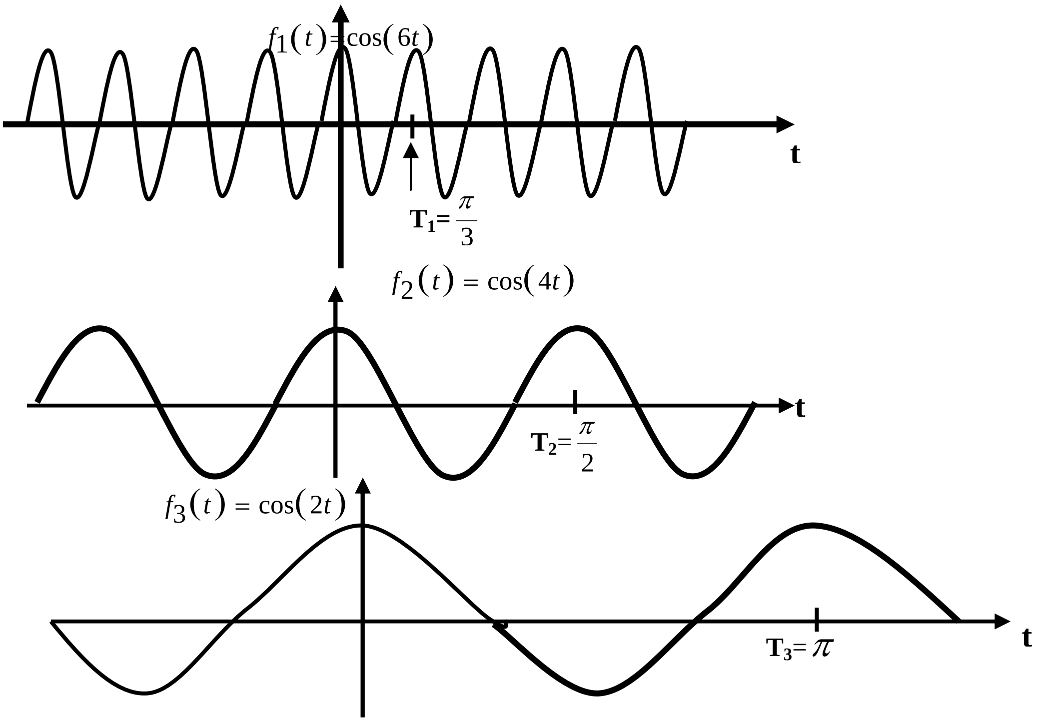
Β) Τα χρονοσυνεχή ημιτονοειδή και μιγαδικά – εκθετικά σήματα, (όπως και τα αντίστοιχα χρονοδιακριτά που θα βρούμε αμέσως μετά), είναι τα σημαντικότερα, θα λέγαμε, περιοδικά σήματα, γιατί παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στην "Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων" (και όχι μόνο), αφού αποτελούν πραγματικά τον θεμελιώδη κορμό για την εξέταση παρά πολλών άλλων σημάτων (και συστημάτων).

Γ) Είδαμε ήδη [(6)], ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα μιγαδικό – εκθετικό σήμα $e^{j\omega t}$ περιοδικό, με περίοδο T_0, είναι: $e^{j\omega T_0} = 1$, που συνεπάγεται ότι $\omega T_0 = 2\pi\kappa, (\kappa \in Z)$, δηλ. το ($\omega T_0$) είναι πολλαπλάσιο του 2π, οπότε $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

(<u>Σημειωτέον ότι</u>: αν $\kappa = 0$, τότε $\omega_0 = 0$, δηλ. τότε το σήμα είναι σταθερό, που όμως θεωρείται περιοδικό, με περίοδο T_0 οποιαδήποτε θετική τιμή του Τ. Γι'αυτό και η θεμελιώδης περίοδος ενός σταθερού σήματος είναι απροσδιόριστη. Μάλιστα αυτός ο ορισμός – ότι η θεμελιώδης συχνότητα ενός σταθερού σήματος είναι μηδέν, ενώ η θεμελιώδης περίοδος είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, δηλ $\omega_0 = \dfrac{2\pi \cdot 0}{T_0} = \dfrac{0}{T_0}, (T_0 > 0)$ – δεν αντίκειται στην πραγματικότητα, αφού ένα σταθερό σήμα έχει πράγματι ρυθμό παλινδρόμησης μηδέν).

Επίσης ας σημειωθεί ότι, η θεμελιώδης περίοδος T_0, των εν λόγω σημάτων είναι αντιστρόφως ανάλογη της θεμελιώδους συχνότητας ω_0.

(Στο παρακάτω σχήμα, τα συγκριτικά γραφήματα 3 χρονοσυνεχών ημιτονοειδών σημάτων, δείχνουν ότι πράγματι οι ποσότητες T_0 και ω_0 είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλ. $\omega_1 = 6 > \omega_2 = 4 > \omega_3 = 2, \varepsilon\nu\omega\, T_1 = \dfrac{\pi}{3} < T_1 = \dfrac{\pi}{2} < T_3 = \pi$)



Δ) Γενίκευση Μιγαδικών – Εκθετικών Σημάτων

Είδαμε ότι, $Ae^{j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) + j\cdot A\sin(\omega_0 t)$ και $Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\cdot A\sin(\omega_0 t+\varphi)$, $(A\in R)$.

Γενικότερα, αν $f(t) = z\cdot e^{wt}$, με $z, w\in Z$, δηλαδή έστω $z = \alpha + \beta i = |z|\cdot e^{j\varphi}$ και $w = \kappa + \omega_0 j$, τότε: $f(t) = z\cdot e^{wt} = (\alpha+\beta j)\cdot e^{(\kappa+\omega_0 j)t} =$
$= |z|e^{j\varphi}\cdot e^{\kappa t}\cdot e^{j\omega_0 t} = |z|e^{\kappa t}\cdot e^{j(\omega_0 t+\varphi)} = |z|e^{\kappa t}\cdot\left[\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi)\right]$, **(11)**.

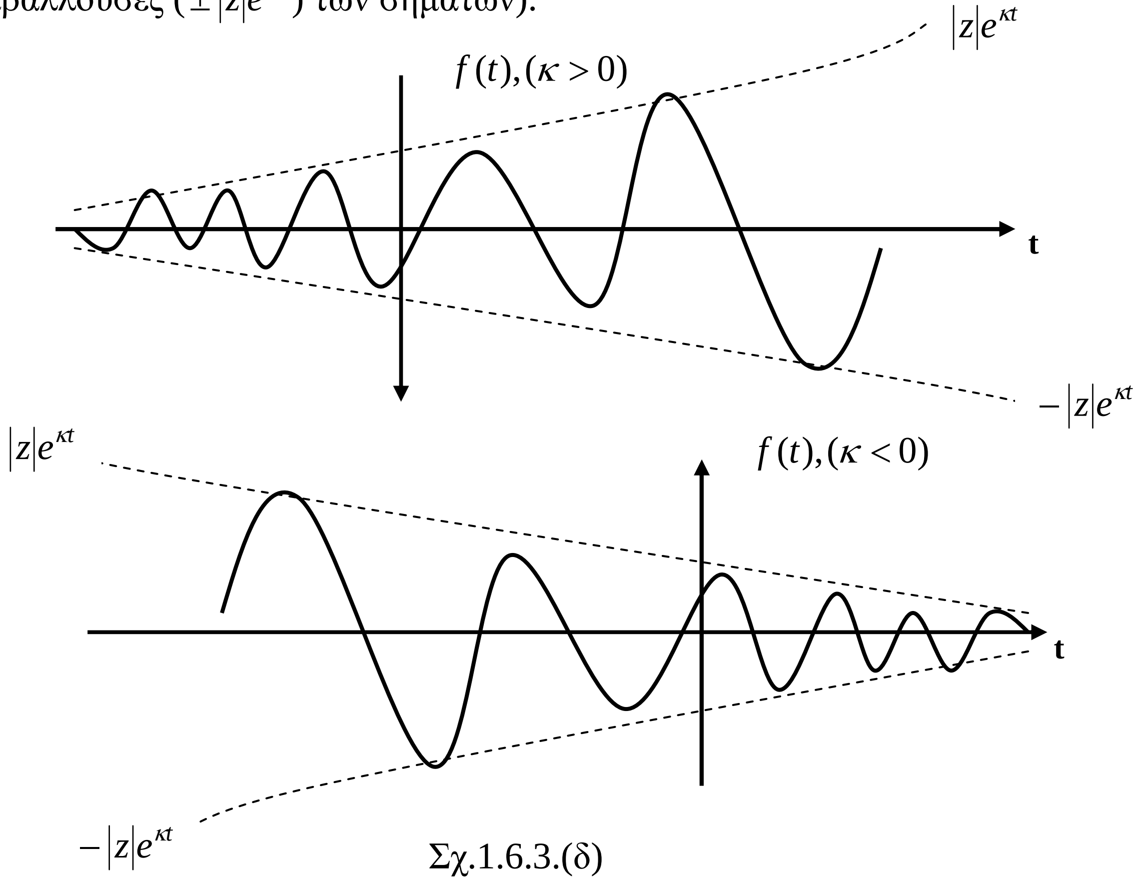
Οπότε από τη σχέση (11):

i) αν $\kappa = 0$, τότε $f(t) = |z|\cdot\left[\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi)\right]$, δηλαδή είναι ημιτονοειδές σήμα της μορφής (9 α), (με $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$).

ii) αν $\kappa > 0$ τότε αντιστοιχεί σε ημιτονοειδές σήμα πολλαπλασιασμένο επί αύξουσα εκθετική (επαυξανόμενο ημιτονοειδές), και

iii) αν $\kappa < 0$, τότε αντιστοιχεί σε ημιτονοειδές σήμα πολλαπλασιασμένο επί φθίνουσα εκθετική (αποσβεννόμενο ημιτονοειδές).

(Σχετικά, για $\kappa > 0$ και $\kappa < 0$, έχουμε τα παρακάτω (αντίστοιχα) γραφήματα του επαυξανόμενου και αποσβεννόμενου ημιτονοειδους σηματος $f(t) = |z|e^{\kappa t}\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)$ όπου οι διακεκομμένες καμπύλες είναι οι περιβάλλουσες ($\pm|z|e^{\kappa t}$) των σημάτων):



Σχ.1.6.3.(δ)

1.6.4. Χρονοδιακριτά Περιοδικά, Ημιτονοειδή και Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Παρότι υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ των χρονοσυνεχών (χρ.σ) και των χρονοδιακριτών (χρ.δ) σημάτων – ημιτονοειδών και μιγαδικών εκθετικών σημάτων, εντούτοις, έχουν και σημαντικές διάφορες.

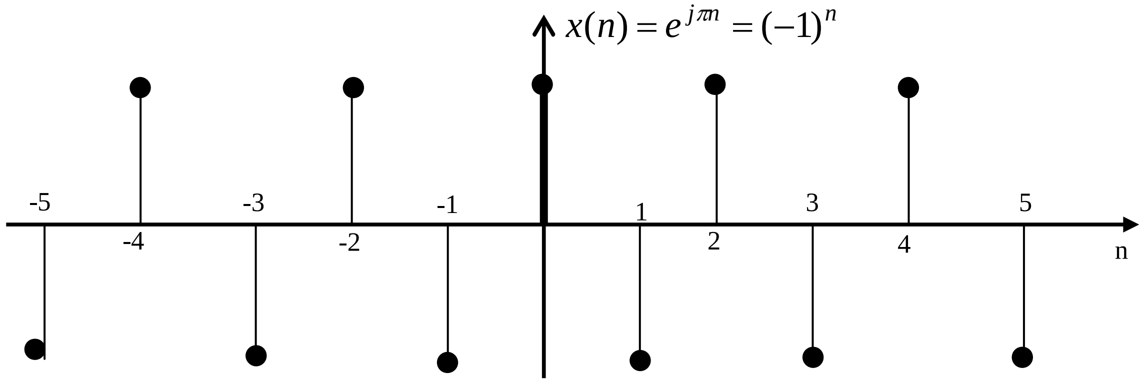
Η σημαντικότερη διάφορα τους είναι ότι τα χρονοδιακριτά ημιτονοειδή σήματα δεν είναι πάντοτε περιοδικά, όπως συμβαίνει με τα αντίστοιχα χρονοσυνεχή ημιτονοειδή σήματα. Έτσι, για να είναι ένα χρονοδιακριτό ημιτονοειδές (ή μιγαδικό εκθετικό) σήμα, περιοδικό, αποδεικνύεται ότι θα πρέπει η φυσική συχνότητα $v = \frac{1}{T_0}$, να είναι ρητός αριθμός, π.χ. αν $v = \sqrt{3}$ ή $v = \pi$, τότε τα αντίστοιχα ημιτονοειδή χρονοδιακριτά σήματα δεν είναι περιοδικά.

[Πράγματι: για να είναι το χρ.δ. μιγαδικό εκθετικό σήμα $e^{j\omega_0 n}$ περιοδικό, με περίοδο $T_0 = N$ ακέραιος θετικός, θα πρέπει να ισχύει: $e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}, (\forall n)$, **(12)** ή ισοδύναμα $e^{j\omega_0 N} = 1$, **(12 α)**, η οποία για να ισχύει θα πρέπει ($\omega_0 N$) να'ναι πολλαπλάσιο του 2π, δηλ. να υπάρχει ακέραιος κ ώστε: $\frac{\omega_0}{\kappa} = \frac{2\pi}{N} <=> N = \kappa \frac{2\pi}{\omega_0}, (\kappa, N \in Z, \mu\varepsilon\ N > 0)$, **(13)**.

άρα, τα μιγαδικά εκθετικά, χρ.δ. σήματα $e^{j\omega_0 n}$ (όπως και τα αντίστοιχα ημιτονοειδή, $e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \cdot \sin(\omega_0 n)$), είναι περιοδικά όταν $\frac{\omega_0}{2\pi}$ είναι ρητός αριθμός, ή αλλιώς όταν $N = \kappa\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ δηλ. η θεμελιώδης περίοδος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{\omega_0}$, ήτοι όταν $v = \frac{1}{N}$ είναι ρητός].

Μια δεύτερη σημαντική διάφορα επίσης, μεταξύ χρ.δ. και χρ.σ. – ημιτονοειδών και μιγαδικών εκθετικών – σημάτων, είναι ότι : τα χρ.σ. για διαφορετικά ω_0, είναι και διαφορετικά σήματα (και μάλιστα όσο αυξάνει το ω_0, τόσο αυξάνει ο ρυθμός παλινδρόμησης του σήματος), ενώ στα χρ.δ το σήμα $e^{j\omega_0 n}$ ταυτίζεται με τα σήματα $e^{j(\omega_0+2\kappa\pi)n}$, (με $\kappa \in Z$), δηλ. με σήματα που έχουν συχνότητες $\omega_0 \pm 2\pi, \omega_0 \pm 4\pi,$ κλπ.

Έτσι, για τα χρ.δ. σήματα $e^{j\omega_0 n}$ αρκεί ένα διάστημα συχνότητας μήκους 2π, για να προσδιοριστεί η θεμελιώδης συχνότητα ($0 \le \omega_0 < 2\pi$), όπου όσο το ω_0 προσεγγίζει το 0 ή το 2π, έχουμε χαμηλές συχνότητες (αργές μεταβολές), ενώ αν το ω_0 πλησιάζει το $\pm\pi$, έχουμε υψηλές συχνότητες (που αντιστοιχούν σε γρήγορες απότομες μεταβολές), π.χ. το σήμα $e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$ με $\omega_0 = \pi$, αλλάζει πρόσημο σε κάθε χρονικό σημείο (n), δηλ. έχει απότομες (γρήγορες) ταλαντώσεις, (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.6.4)



Σχ.1.6.4

<u>1.6.5 Παρατηρήσεις (στα Χρονοδιακριτά – Ημιτονοειδή και Μιγαδικά Εκθετικά – Σήματα)</u>

Α) τα χρονοδιακριτά – μιγαδικά εκθετικά και ημιτονοειδή σήματα, δεν είναι πάντοτε περιοδικά, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα χρονοσυνεχή που είναι πάντα περιοδικά με θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 \dfrac{2\pi}{T_0}$.

Τα χρ.δ. σήματα $e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\cdot\sin(\omega_0 n)$ είναι περιοδικά μόνο όταν $N=\kappa\dfrac{2\pi}{\omega_0}$, (με κ και N>0, ακέραιους) και έχουν θεμελιώδη συχνότητα $\dfrac{\omega_0}{\kappa}$.

B) Ισχύουν και στα χρ.δ. οι γνωστές σχέσεις Euler, δηλ:

$Ae^{j(\omega_0 n+\varphi)}=Ae^{i\varphi}\cdot e^{j\omega_0 n}=A\cos(\omega_0 n+\varphi)+jA\sin(\omega_0 n+\varphi)$, (I),

$A\cos(\omega_0 n+\varphi)=\dfrac{A}{2}\left(e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 n}+e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega_0 n}\right)$,

$A\sin(\omega_0 n+\varphi)=\dfrac{A}{2j}\left(e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 n}-e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega_0 n}\right)$,

Γενικότερα, αν $x(n)=z\cdot w^n$, $(z,w\in C)$, με $z=|z|\cdot e^{j\varphi}$, $w=|w|\cdot e^{j\omega_0}$, τότε:

$x(n)=z\cdot w^n=|z|e^{j\varphi}\left(|w|e^{j\omega_0}\right)^n=|z|\cdot|w|^n\cdot e^{j(\omega_0 n+\varphi)}=|z|\cdot|w|^n\left[\cos(\omega_0 n+\varphi)+j\sin(\omega_0 n+\varphi)\right]$

όποτε: -αν $|w|=1$, τότε ημιτονοειδής ακολουθία – σήμα, δηλ. (I),

-αν $|w|>1$, τότε επαυξανόμενη ημιτονοειδής ακολουθία – σήμα,

-αν $|w|<1$, τότε αποσβεννόμενη ημιτονοειδής ακολουθία – σήμα.

Γ) Για τα χρ.δ. σήματα ισχύει ότι: αν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι περιοδικά με θεμελιώδεις περιόδους N1 και N2 αντίστοιχα, τότε και το άθροισμα τους $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$ είναι επίσης περιοδικό χρ.δ. σήμα, με θεμελιώδη περίοδο: $N=\dfrac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1,N_2)}$, (ΜΚΔ=Μέγιστος Κοινός Διαιρετής), **(14)**

Το ίδιο ισχύει (14) και για το γινόμενο τους $y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$, (όπου το N όμως, μπορεί τότε να είναι και πολλαπλάσιο της θεμελιώδους περιόδου)

Δ) Όπως έχουμε ξαναπεί, το χρ.δ σήματα συνήθως (στην πράξη) προέρχονται από δειγματοληψία χρ.σ σημάτων (π.χ. σήματα φωνής και ήχου, δεδομένα από Radar ή sonar, σεισμικά, αστρονομικά, βιολογικά, πυρηνικά σήματα). Όμως αυτή η συνήθης μετατροπή [από αναλογικά σε ψηφιακά σήματα (A/D), όπως και η αντίστροφη της (D/A), που γίνεται μέσω ειδικών συσκευών, συστημάτων (Μετατροπείς – Converters)], απαιτεί βέβαια εξειδικευμένες διαδικασίες – χειρισμούς, ώστε και «πληροφορίες» που μεταφέρουν τα σήματα να μην χάνονται αλλά και να έχουν ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες (π.χ περιοδικότητα).

Έτσι, π.χ. το χρ.δ. ημιτονοειδές σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{12}\right)$ που μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από δειγματοληψία του χρ.σ. ημιτονοειδούς σήματος: $f(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$, ανά ακέραια χρονικά σημεία, έχει θεμελιώδη περίοδο: $N = \kappa\frac{2\pi}{\omega_0} = \kappa\frac{2\pi}{2\pi/12} = \kappa\frac{12\cdot 2\pi}{2\pi} = 12$,(αφού το μικρότερο ακέραιο κ, είναι κ=1). Διατηρεί δηλ. την θεμελιώδη περίοδο του χρ.σ. σήματος $f(t)$ από το οποίο προήλθε, αφού και το $f(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$ έχει $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi/12} = 12$.

Αντίθετα, το χρ.δ. σήμα $x(n) = \cos(2n)$, που μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από δειγματοληψία (ανά ακέραια χρονικά σημεία) του χρ.σ. σήματος $f(t) = \cos(2t)$ δεν είναι καν περιοδικό (δηλ. είναι μη – περιοδικό), παρότι η $f(t)$ έχει $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Και τούτο, γιατί $\nu = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{\pi}$ (μη ρητός αριθμός), ή αλλιώς δεν υπάρχει κ ακέραιος, ώστε $N = \kappa\frac{2\pi}{\omega_0} = \kappa\frac{2\pi}{2} = \kappa\pi$, με Ν ακέραιο θετικό.

Ε) Παραδείγματα (στα χρ.δ. ημιτονοειδή σήματα)

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικά και να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδος των χρονοδιακριτών σημάτων:

$$x_1(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right),\ x_2(n)=e^{j\frac{\pi n}{8}},\ x_3(n)=\cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right),\ x_4(n)=e^{j\left(\frac{2\pi n}{12}\right)},\ x_5(n)=\cos\left(\frac{n}{6}\right),$$

$$x_6(n)=\cos\left(\frac{8\pi n}{21}\right),\ x_7(n)=\cos\left(\frac{2n}{7}\right),\ x_8(n)=e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}+e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)n}$$

Απάντηση: Αν το $x_1(n)$ είναι περιοδικό σήμα, τότε η θεμελιώδη περίοδος του θα είναι: $N_1=\kappa_1\frac{2\pi}{\omega_1}=\kappa_1\frac{2\pi}{2\pi/10}=10\cdot\kappa_1$, οπότε ο μικρότερος κ_1, ώστε να ισχύει η παραπάνω ισότητα και Τ1 ακέραιος θετικός είναι $\kappa_1=1$.

Άρα, το χρ.δ ημιτονοειδές σήμα $x_1(n)$ είναι περιοδικό και έχει θεμελιώδη περίοδο $N_1=10$.

Όμοια, για το μιγαδικό εκθετικό χρ.δ. σήμα $x_2(n)$, έχουμε: $N_2=\kappa_2\frac{2\pi}{\omega_2}=\kappa_2\frac{2\pi}{\pi/8}=16\cdot\kappa_2$, οπότε για $\kappa_2=1$ (τουλάχιστον), άρα $N_2=16$.

Όμοια : $N_3=\kappa_3\frac{2\pi}{\omega_3}=\kappa_3\frac{2\pi}{8\pi/31}=\kappa_3\frac{31}{4}$, οπότε $\kappa_3=4$, (τουλάχιστον), $N_3=31$, (ενώ της αντίστοιχης χρ.σ. $f(t)=\cos\left(\frac{8\pi t}{31}\right), T_3=\frac{2\pi}{8\pi/31}=\frac{31}{4}$).

Επίσης: $N_4=\kappa_4\frac{2\pi}{2\pi/12}=\kappa_4\cdot 12$, οπότε $\kappa_4=1$, άρα $N_4=12$.

$N_5=\kappa_5\frac{2\pi}{1/6}=\kappa_5\cdot 12\pi$, οπότε δεν υπάρχει ακέραιος κ_5, ώστε N_5 να είναι ακέραιος θετικός, άρα $x_5(n)$, μη – περιοδικό σήμα.

$$N_6=\kappa_6\frac{2\pi}{8\pi/21}=\kappa_6\frac{21}{4}\xrightarrow{\mathrm{K}_6=4}N_6=21$$

$$N_7=\kappa_7\frac{2\pi}{2/7}=\kappa_7\cdot 7\pi \Rightarrow x_7(n),\ \text{μη – περιοδικό.}$$

Τέλος, για το $x_8(n)$, ο ά προσθετέος $e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}$ έχει θεμελιώδη περίοδο $N_{8\alpha}=3$ και ο ‘β προσθετέος έχει θεμελιώδη περίοδο $N_{8\beta}=8$ άρα σύμφωνα με τη σχέση (14) το σήμα $x_8(n)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο: $N_8=\frac{3\cdot 8}{\text{ΜΚΔ}(3,8)}=\frac{24}{1}=24$.

1.6.6. Συμμετρικά (Άρτια – Περιττά), αιτιατά, κλπ, Σήματα.

Συχνά τα διάφορα γνωστά είδη συμμετρίας των συναρτήσεων, όταν μεταφέρονται στα αντίστοιχα σήματα, διευκολύνουν κατά πολύ στη λύση των διάφορων προβλημάτων των σημάτων. Έτσι, ένα σήμα πραγματικής τιμής, λέγεται άρτιο, όταν : $x(n) = x(-n), \forall n \in R$ ή $(\forall n \in Z)$, ενώ αντίθετα λέγεται περιττό όταν: $x(-n) = -x(n), \forall n \in R$ ή $(\forall n \in Z)$, με τις γνωστές ιδιότητες που ισχύουν για τις άρτιες και περιττές συναρτήσεις. Δηλαδή, ένα σήμα $x(n)$ μπορεί να γράφει σαν άθροισμα ενός άρτιου x_α και ενός περιττού x_π σήματος $x(n) = x_a(n) + x_\beta(n)$, ή $x_\alpha(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ και $x_\pi(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$, κλπ.

Εξάλλου, ένα σήμα $x(n)$ λέγεται αιτιατό, όταν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του n, δηλαδή: $x(n) = 0$, για $n < 0$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λέγεται μη αιτιατό.

Τέλος, τα σήματα διακρίνονται σε <u>νομοτελειακά</u> και <u>τυχαία</u> σήματα, σύμφωνα με τη στατιστική έννοια. Δηλ. νομοτελειακά λέγονται τα σήματα που με τις ίδιες δίνουν τις ίδιες τιμές, ενώ τυχαία (ή και στοχαστικά) λέγονται τα σήματα που με τις ίδιες συνθήκες, οι τιμές των δειγμάτων τους δεν προσδιορίζονται με βεβαιότητα πριν εμφανισθούν. Π.χ τα σεισμικά σήματα, τα βιολογικά σήματα, η φωνή, το ύψος θαλάσσιων κυμάτων, κλπ, είναι τυχαία ή στοχαστικά σήματα, ενώ οι συναρτήσεις, οι πίνακες τιμών, κλπ, είναι νομοτελειακά σήματα.

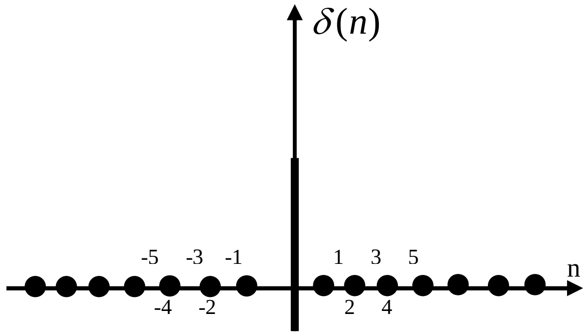
Σχετικές με τα στοχαστικά σήματα, είναι και οι έννοιες της <u>εργοδικότητας</u> (ένα σήμα μπορεί να εκπροσωπεί «στατιστικά» μια οικογένεια σημάτων) και της <u>στασιμότητας</u> (όταν χρονικά δεν μεταβάλλονται οι στατιστικές ιδιότητες).

<u>ΕΙΔΙΚΑ (ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ) ΣΗΜΑΤΑ</u>
<u>1.6.7 Χρονοδιακριτό: Μοναδιαίο Κρουστικό σήμα και Μοναδιαίο βηματικό Σήμα</u>

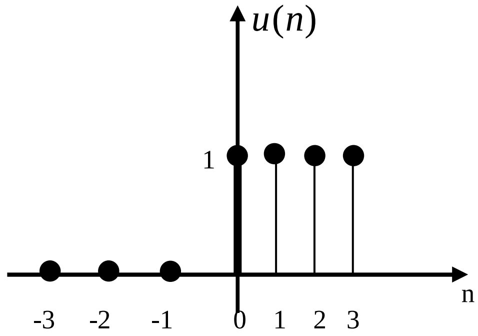
Α) Ονομάζουμε <u>Χρονοδιακριτό Μοναδιαίο Κρουστικό Σήμα</u> (Discrete – Time Unit Impulse), ή χρ.δ. μοναδιαίο παλμό (ή χρ.δ. μοναδιαίο δείγμα, ή μοναδιαία διακριτή ώση) το σήμα:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}, \textbf{(15)},$$

που απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 1.6.7 (Α)



Σχ.1.6.7.(Α) (χρ.δ. Μοναδιαίο Κρουστικό)



Σ.χ.1.6.7.(β) (Βηματική Ακολουθία)

Ας σημειωθεί ότι το χρ.δ. μοναδιαίο δείγμα (15), είναι ένα πολύ απλό σήμα, που για μια χρονική στιγμή ($n = 0$) γίνεται 1, ενώ όλο τον υπόλοιπο χρόνο είναι μηδέν.

Β) Ονομάζουμε <u>χρ.δ. Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα</u> (Discrete – Time Unit Step) ή βηματική ακολουθία το σήμα:

$$u(n) = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}, \textbf{(16)},$$

<u>Σημείωση:</u>

Μεταξύ των 2 προηγούμενων σημάτων (15) και (16) ισχύουν οι σχέσεις; $u(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta(i)$, **(17)**, και $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$, **(18)**.

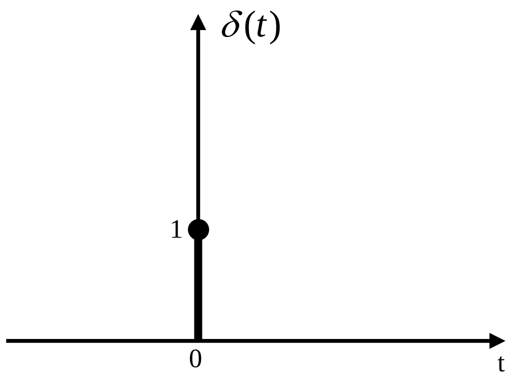
1.6.8 Χρονοσυνεχές: Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση και Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση.

Α) Ονομάζουμε χρ.σ. Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση (Continuous – Time Unit Impulse Function), ή συνάρτηση Dirac ή κρουστική συνάρτηση δέλτα, τη γνωστή από τα Μαθηματικά συνάρτηση Dirac, που ορίζεται μόνο για τη χρονική στιγμή $t = 0$ ενώ $\delta(t) = 0$, για $t \neq 0$, αλλά έχει όμως εμβαδόν ίσον με 1 δηλ. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$, **(19)**, (δες Σχ.1.6.8.(Α)).

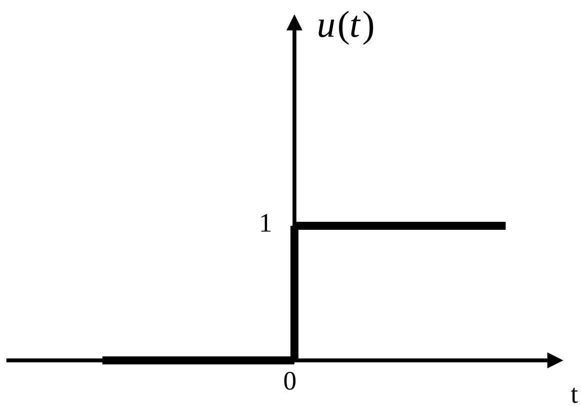
(Η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$, δεν είναι συνάρτηση με την συνήθη έννοια, αλλά είναι όπως λέμε στα Μαθηματικά, μια γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή).

Β) Ονομάζουμε χρ.σ. Μοναδιαία Βηματική συνάρτηση (Continuous – time unit step function), ή χρ.σ. Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα, το σήμα:

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$, **(20)**, Δες Σχ.1.6.8.(Β)



Σχ.1.6.8.(α) (Χρ..σ. Μοναδιαίο Κρουστικό)



Σχ.1.6.8.(β) (Χρ.σ. Βηματική Συνάρτηση)

Σημείωση:

Μεταξύ των 2 προηγούμενων σημάτων (19) και (20) ισχύουν οι σχέσεις:

$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(T)dT = \int_{0}^{\infty} \delta(t-T)dT$,(21) και

$\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$, (22)

1.6.9. Παρατηρήσεις

Α) Τα προαναφερόμενα σήματα, χρ.δ. και χρ.σ. Μοναδιαίο Κρουστικό και Βηματικό, είναι θεμελιώδη σήματα από μαθηματική τουλάχιστον άποψη, γιατί ακόμη κι αν δεν συναντώνται στην πράξη σαν φυσικά σήματα, αποτελούν το υπόβαθρο για την μελέτη πολλών άλλων πιο σύνθετων σημάτων. Έτσι, το χρ.δ. μοναδιαίο κρουστικό σήμα $\delta(n)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση οποιουδήποτε χρ.δ σήματος $x(n)$, ως εξής $x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$, ή πιο αναλυτικά $x(n) = \ldots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \ldots$ (23) (όπου ο κάθε όρος $x(i)\delta(n-i)$ θεωρείται ως ένα σήμα με πλάτος $x(i)$ τη χρονική στιγμή $n = i$ και μηδέν για κάθε άλλη τιμή του `n).

Β) Είπαμε ότι ένα χρονοδιακριτό σήμα, είτε είναι από τη φύση του τέτοιο, είτε (συνήθως) προέρχεται από δειγματοληψία ενός χρονοσυνεχούς σήματος. Λέγοντας δειγματοληψία (sampling), εννοούμε να καταγράφουμε τις τιμές του χρονοσυνεχούς σήματος, επιλεκτικά, ανά κάποιες χρονικές στιγμές. Όταν οι χρονικές αυτές στιγμές επιλέγουν να ισαπέχουν μεταξύ τους (όπως λέγεται συνήθως), τότε έχουμε την «ομοιόμορφη δειγματοληψία».

Η όλη αυτή διαδικασία της δειγματοληψίας που μετατρέπει «εξομοιώνει» ένα χρ.σ. σήμα σε χρ.δ. , οφείλεται στην ανάπτυξη των Η/Υ, (οι οποίοι «δουλεύουν» ως γνωστό με αλγόριθμους της Αριθμητικής Ανάλυσης). Και βέβαια αυτή η δειγματοληπτική διαδικασία για να είναι αποτελεσματική, απαιτεί κάποιες προϋποθέσεις που μοντελοποιούνται σε μαθηματικές σχέσεις (όπως π.χ. το περίφημο θεώρημα Shannon (1948), η συχνότητα αποκοπής του Ngquist, κλπ).

1.7 Συστήματα

Η έννοια του Συστήματος είναι γενικά μια ευρεία έννοια, είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του σήματος και χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς.

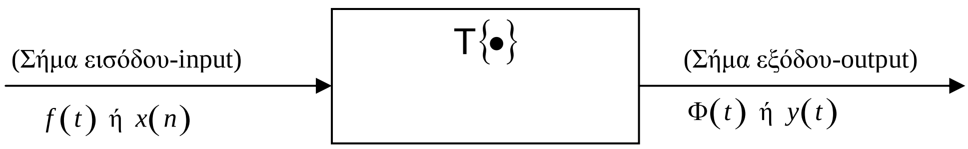
Έτσι μιλάμε, για το οικολογικό σύστημα, το ηλεκτρικό ή μηχανικό σύστημα, το οικονομικό σύστημα, το ηλεκτρονικό σύστημα, κλπ. Το αυτοκίνητο, το αεροπλάνο, η τηλεόραση, το ραδιόφωνο, ο Η/Υ, κλπ, είναι μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα συστημάτων από τον τομέα της Τεχνολογίας.

Ένα σύστημα λοιπόν μπορούμε να πούμε, ότι είναι μια εξελικτική διαδικασία (process), όπου στην είσοδο (input) εισάγει κάποια σήματα $x(n)$ και αφού τα «μετασχηματίζουν» εξάγει στην έξοδο (output) κάποια αλλά σήματα $y(n)$.

Άρα: «Σύστημα, ονομάζουμε την διαδικασία, που μετατρέπει ένα σήμα σε ένα άλλο».

Στην μαθηματική του έκφραση, ένα σύστημα είναι μια απεικόνιση (που δεν αντιστοιχίζει όμως όπως συνήθως σύνολα αριθμών, αλλά σύνολα συναρτήσεων – σημάτων). Είναι δηλ. μια ιδιαίτερη περίπτωση της γνωστής μας έννοιας της απεικόνισης (συνάρτησης), που στα Μαθηματικά λέγεται και Τελεστής ή Μετασχηματισμός $T\{\bullet\}$, που μετασχηματίζει το σήμα εισόδου σε ένα άλλο, μέσω μιας διαδικασίας ενός σταθερού συνόλου κανόνων ή πράξεων.

Σχηματικά ένα Σύστημα $T\{\bullet\}$, που όταν υφίσταται μια ($f(t)$ ή $x(n)$) διέγερση – σήμα στην είσοδο, τότε παράγει μια απόκριση – σήμα ($\Phi(t)$ ή $y(t)$) στην έξοδο, μπορεί γενικά να παρασταθεί:



1.7.1. Παρατηρήσεις (στα Συστήματα)

α) Είδη Συστημάτων: Τα συστήματα διακρίνονται σε χρονοσυνεχή (Αναλογικά) ή χρονοδιακριτά (Ψηφιακά), ανάλογα με την αντίστοιχη κατηγόρια των σημάτων εισόδου και εξόδου του συστήματος. (Ακόμη μιλάμε για τα υβριδικά συστήματα, όπου τα σήματα εισόδου και εξόδου ανήκουν σε διαφορετικά είδη.)

β) Ένα σύστημα μπορεί να δέχεται στην είσοδο την εισαγωγή ενός σήματος ή και περισσότερων και να εξάγει ένα ή περισσότερα σήματα στην έξοδο.

Εμείς θα αναφερθούμε σε συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (σύστημα SISO, Single Input – Single Output).

Συστήματα με πολλές εισόδους και μια έξοδος (αθροιστής), αναφέρονται ως MISO (MultiInput-Single Output), ενώ αυτά με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους ως MIMO (MultiInput – Multi Output). Βέβαια στην πράξη, έχουμε διασύνδεση πολλών συστημάτων μεταξύ τους, όπως π.χ. σε ένα ηχητικό σύστημα, όπου διασυνδέονται τα υποσυστήματα ενός ραδιόφωνου, ενός cd player, ή ενός μαγνητοφώνου, με ενισχυτή και διάφορα μεγάφωνα.

Γ) ΤΑ χρ.σ. (Αναλογικά) συστήματα, κατά την μελέτη τους, συνήθως καταλήγουν να εκφράζονται Μαθηματικά από «Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές», που λύνονται καλύτερα από τους τεχνολόγους μέσω των μετασχηματισμών Laplace και Fourier.

Αντίθετα τα χρ.δ. (ψηφιακά) συστήματα, καταλήγουν να εκφράζονται Μαθηματικά από «Γραμμικές Εξισώσεις Διαφόρων με σταθερούς συντελεστές», που οι λύσεις τους αντιμετωπίζονται καλύτερα μέσω του αντιστοίχου μετασχηματισμού Ζ (Ζητά).

Ο σκοπός της χρήσης ενός μετασχηματισμού, γενικά (όπως θα δούμε διεξοδικά στα επόμενα), είναι να δημιουργηθεί ένα νέο πεδίο, όπου εκεί είναι ευκολότερο να μελετηθεί το εξεταζόμενο πρόβλημα απ'ότι στο αρχικό πεδίο (συνήθως από το αρχικό πεδίο σημάτων ως προς τον χρόνο t, πάμε στο νέο πεδίο σημάτων ως προς την συχνότητα s ή ω). Οπότε, παίρνοντας τα μετασχηματισμένα αποτελέσματα, μπορούμε μέσω του Αντίστροφου Μετασχηματισμού να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα στο αρχικό πεδίο.

1.7.2. Βασικές ιδιότητες των Συστημάτων

I) Υπέρθεση (Επαλληλίας)

Ένα σύστημα T, λέμε ότι διέπεται από την ιδιότητα ή την Αρχή της Υπέρθεσης (Superposition) ή Επαλληλίας όταν για οποιαδήποτε σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$, ισχύει:

$$T\{x_1(n)+x_1(n)\}=T\{x_1(n)\}+\{x_2(n)\}$$

II) Ομογενείς

Ένα σύστημα T λέγεται ομογενές, όταν: $T\{cx(n)\}=cT\{x(n)\}$ για κάθε σταθερά $c\in C$ και για κάθε σήμα $x(n)$.

III) Γραμμικότητα

Ένα σύστημα T λέγεται Γραμμικό (linear). Όταν:

.

$$\boxed{T\{c_1\cdot x_1(n)+c_2\cdot x_2(n)\}=c_1\cdot T\{x_1(n)\}+c_2\cdot T\{x_2(n)\}}$$

$\forall c_1, c_2 \in C$ και για όποια σήματα $x_1(n), x_2(n)$

Παρατήρηση: Ένα σύστημα είναι γραμμικό, όταν αυτό είναι ομογενές και διέπεται ταυτόχρονα απ'την αρχή της Υπέρθεσης. (Όλες οι αναφερόμενες εδώ ιδιότητες των συστημάτων, πέρα απ'τους συμβολισμούς, ισχύουν για χρ.δ. αλλά και χρ.σ. συστήματα).

Η ιδιότητα της Γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική, γιατί μας δίνει την δυνατότητα ανάλογα με το σήμα εισόδου να προσδιορίζεται (σε μεγάλο βαθμό) η απόκριση της εξόδου του συστήματος. Π.χ. το σύστημα $y(n)=3x(n)+1$ δεν είναι γραμμικό ενώ αντίθετα το σύστημα $y(n)=5x(n)$ είναι .(αφού για την γραμμικότητα, μηδενική είσοδος πρέπει να παράγει μηδενική έξοδο).

Άσκηση: Να εξεταστεί η Γραμμικότητα των παρακάτω Συστημάτων:

α) $y(t)=t\cdot x(t)$, β) $y(t)=x^2(t)$,γ) $y(n)=2x(n)+3$, δ) $y(t)=x(\sin t)$.

IV) Με και χωρίς μνήμη, σύστημα

« Ένα σύστημα λέγεται Στατικό ή χωρίς μνήμη, όταν η έξοδος του κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή».

Δηλ. ένα σύστημα χωρίς μνήμη, είναι αυτό το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε την έξοδο $y(n_0)$, μόνο από τη δεδομένη είσοδο $x(n_0)$, για κάθε χρονική στιγμή y_0.

Αντίθετα, ένα σύστημα λέγεται με μνήμη ή δυναμικό σύστημα, όταν η έξοδος του $y(n_0)$ την χρονική στιγμή n_0 , εξαρτάται και από τις τιμές που παίρνει η είσοδος και σε άλλες χρονικές στιγμές πέρα απ'την y_0 .

Ένα απλό παράδειγμα συστήματος χωρίς μνήμη είναι η ωμική αντίσταση R, δηλ. $y(t) = R \cdot x(t)$, ή το ταυτοτικό σήμα $y(t) = x(t)$. Επίσης, το σύστημα $y(n) = x^2(n) - 1$ είναι χωρίς μνήμη, ενώ το $y(n) = x(n-1)$ είναι σύστημα με μνήμη. Όπως και η χωρητική αντίσταση. (Τα πιο ενδιαφέροντα στις εφαρμογές, είναι τα δυναμικά συστήματα).

V) Αιτιατό και Μη Σύστημα

« Ένα σύστημα λέγεται Αιτιατό, αν για κάθε n_0 , η έξοδος εξαρτάται μόνο από τις τιμές που έχει λάβει ήδη η είσοδος μέχρι και τη χρονική στιγμή n_0 .»

Δηλ. σε ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορούν οι μεταβολές της εξόδου, να προηγούνται των μεταβολών της εισόδου. Π.χ. το σύστημα που εκφράζεται από την εξίσωση $y(n) = x(n) + x(n-1)$ είναι αιτιατό.

Αλλιώς το σύστημα λέγεται μη αιτιατό, π.χ. το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση $y(n) = x(n) - x(n+1)$είναι (προφανώς) μη αιτιατό, όπως και το $y(t) = x(t+1)$. Τέλος όλα τα συστήματα χωρίς μνήμη είναι αιτιατά.

V) Χρονικά Αμετάβλητο, Σύστημα

Ένα σύστημα λέγεται Χρονικά Αμετάβλητο (Time Invariance), όταν μια χρονική μετάθεση του σήματος εισόδου, δημιουργεί μόνο, την ίδια χρονική μετάθεση στο σήμα εξόδου.

Δηλαδή, αν $y(n) = T\{x(n)\} <=> y(n-n_0) = T\{x(n-n_0)\}$. Π.χ το σύστημα $y(n) = x(n-1)$ είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ αντίθετα το σύστημα $y(n) = nx(n-1)$ είναι χρόνια μεταβλητό.

Σημείωση: Άλλες ιδιότητες των συστημάτων, είναι η ευστάθεια, (όπου από εισόδους φραγμένου πλάτους, προκύπτουν έξοδοι φραγμένου πλάτος), η αντιστρεψιμότητα (που από την έξοδο μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα η είσοδος του συστήματος) και βέβαια η σπουδαία έννοια της Συνέλιξης (που θα μας απασχολήσει διεξοδικά κατά την μελέτη των Μετασχηματισμών). Τέλος, ας σημειωθεί ότι από τις ιδιότητες που είδαμε, αυτές που είναι πιο ενδιαφέρουσες, είναι της Γραμμικότητας και του χρονικά αμετάβλητου συστήματος, αφού στα συστήματα με αυτές τις ιδιότητες, η σχέση εισόδου – εξόδου τους μπορεί να εκφραστεί και να μελετηθεί αναλυτικά μέσω της συνέλιξης τους.

Έτσι, τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα είναι τα πιο ενδιαφέροντα, αφού εκτός του ότι μελετώνται ευκολότερα, αποτελούν και τον βασικό κορμό για την ανάπτυξη της θεωρίας των συστημάτων (και των Μετασχηματισμών).

…………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………
…………………………………………………………

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Εξετάζοντας τα περί Σειρών Fourier , είδαμε ότι κάθε συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σ' ένα διάστημα $T=[-L,L]$, που πλήρη βέβαια τις λεγόμενες συνθήκες του Dirichlet μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier ,
(είτε η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο το διάστημα T - είτε στην περιοδική επέκταση της $f(x+2L)=f(x)$ όταν ορίζετε μόνο στο διάστημα $T=2L$).
Είδαμε δηλαδή ότι $f(x)$ ισούται με το άθροισμα των απείρων ημιτονοειδών όρων της σειράς Fourier , ή αλλιώς ότι η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(x)$, δηλαδή ότι ισχύει :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\left[\alpha_v\cdot\cos\left(\dfrac{v\pi x}{L}\right)+\beta_v\cdot\sin\left(\dfrac{v\pi x}{L}\right)\right], \\ \text{όπου :} \\ \left.\begin{array}{l}\alpha_v=\dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot\cos\left(\dfrac{v\pi x}{L}\right)dx \\ \beta_v=\dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot\sin\left(\dfrac{v\pi x}{L}\right)dx\end{array}\right\}\quad v,\in N \end{array}\right\} \quad (1)$$

Η 1 ισχύει για κάθε χ σημείο συνέχειας της $f(x)$, ενώ αν x_o σημείο ασυνέχειας της $f(x)$ τότε

$$f(x)=\left[\lim_{x\to x_o^+}f(x)+\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right], \qquad (2)$$

Συνήθως βέβαια στις εφαρμογές είναι $L=\pi$, δηλ. $T=[-\pi,\pi]$,οπότε όπως είδαμε οι παραπάνω σχέσεις απλουστεύονται στις :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{\alpha_o}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\left[\alpha_v\cdot\cos(vx)+\beta_v\cdot\sin(vx)\right] \\ \text{όπου} \\ \alpha_v=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(vx)dx \\ \beta_v=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(vx)dx \end{array}\right\}$$

Εξάλλου , αν $f(x)$ είναι άρτια συνάρτηση δηλ. $f(x)=f(-x),\forall x\in[-L,L]$,(είτε η $f(x)$ ορισμένη στο $[0,L]$ επεκτείνετε περιοδικά σε άρτια συνιμητονική σειρά Fourier τότε η σχέση 1 απλουστεύεται σε :

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{\alpha_o}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\alpha_v\cdot\cos\left(\dfrac{v\pi x}{L}\right), \\ \text{όπου } \alpha_v=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\dfrac{v\pi x}{L}\right)dx \text{ και } \beta_v=0,(\forall v\in N) \end{array}\right\} \quad (1\alpha)$$

Όμοια , αν $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση , δηλ. $f(-x) = -f(x), \forall \in [-L, L]$
(είτε η $f(x)$ ορισμένη στο $[0, L]$,επεκτείνεται περιοδικά σε περιττή – ημιτονική σειρά Fourier), τότε η σχέση 1 απλουστεύεται σε:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sum_{v-1}^{\infty} \beta_v \cdot \sin\left(\frac{v\pi x}{L}\right), \\ & \text{όπου } \beta_v = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{v\pi x}{L}\right) dx \text{ , και αν } \alpha_v = 0, (\forall v \in N), \end{aligned}\right\} \quad 1\beta$$

Ανάλογα , αν $L = \pi$, όταν $f(x) = f(-x)$ άρτια ,
Τότε οι σχέσεις 3 απλουστεύονται ακόμη με συντελεστές :

$$\boxed{\alpha_v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(vx) dx \quad \text{και} \quad \beta_v = 0, (\forall v \in N)} \qquad 3\alpha$$

ενώ αν $L = \pi$ και $f(-x) = -f(x) =$ περιττή , τότε οι συντελεστές της 3 ,γίνονται:

$$\boxed{\beta_v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(vx) dx \quad \text{και} \quad \alpha_v = 0, (\forall v \in N)} \qquad 3\beta$$

Επίσης , σε μιγαδική μορφή , η σειρά Fourier 1

γράφεται : $f(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} C_v \cdot e^{jv\omega x}$, $\qquad$ 4

όπου $C_v = \frac{1}{T}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-jv\omega x} dx, \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad$ 4α

Τέλος ισχύει η <u>”ταυτότητα PARSEVAL”</u>

δηλ.

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x) dx = \frac{\alpha_0}{2} = \sum_{v=1}^{\infty}\left(\alpha_v^2 + \beta_v^2\right)} \qquad 5$$

<u>Παρατήρηση :</u> οι συνθήκες – προϋποθέσεις του Dirichlet που όταν πληρούνται (ικανές – όχι αναγκαίες), τότε μας εξασφαλίζουν ότι μια συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναλυθεί σε αρμονική σειρά Fourier 1 είναι οι εξής :

α) Η συνάρτηση $f(x)$ και η παράγωγος της $f'(x)$ είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς (δηλ. είναι ασυνεχείς το πολύ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων) στο πεδίο ορισμού τους $T = [-L, L]$ και

β) Η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2L$, είτε επεκτείνεται περιοδικά εκτός του διαστήματος $[-L, L]$, δηλ ισχύει ότι : $f(x + 2vL) = f(x), (\forall v \in Z)$

ΙΙ) Όπως είδαμε, με τις Σειρές Fourier καταφέρνουμε να εκφράσουμε μια περιοδική (ή κατ'επέκταση περιοδική) συνάρτηση, μέσω των απλούστερων περιοδικών συναρτήσεων δηλ. των ημιτονοειδών (σχέση (1)), ή των ισοδύναμων μιγαδικών – εκθετικών (σχέση (4)).

Είναι γνωστό επίσης για μια συνάρτηση $f(x)$ που αναλύεται σε σειρές Fourier, ότι η γραφική παράσταση των πλατών των αρμονικών συνιστωσών α_ν, β_ν (της (1) ή γ_ν της (5)), είτε των μέτρων C_ν (της σχέσης (4)), συναρτήσει της συχνότητας ν_ω, δίνει το λεγόμενο <u>«γραμμικό φάσμα συχνοτήτων»</u> της $f(x)$, με ισαπέχουσες τις γραμμές του φάσματος κατά $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Μια γραφική παράσταση που ως γνωστόν είναι αρκετά χρήσιμη για την «αποκάλυψη» πολλών χαρακτηριστικών της $f(x)$, αφού π.χ. συναρτήσεις χωρίς ασυνέχειες έχουν γρ. φάσμα που φθίνει γρήγορα (άρα χρειαζόμαστε λίγες αρμονικές της σειρές Fourier για να την προσεγγίσουμε ικανοποιητικά), ενώ αντίθετα συναρτήσεις με ασυνέχειες έχουν γρ.φασμα που φθίνει αργά (άρα χρειαζόμαστε πολλές αρμονικές – ν αρκετά μεγάλο, για να προσεγγιστεί ικανοποιητικά η $f(x)$ από την άπειρο – σειρά Fourier).

Ας δούμε τώρα, ως εισαγωγή στην επόμενη σχετική έννοια του <u>Ολοκληρώματος και του Μετασχηματισμού</u> Fourier, τι συμβαίνει με το γραμμικό φάσμα της $f(x)$, όταν αυξάνει η περίοδο της.

Λοιπόν, όσο αυξάνει η περίοδος Τ της $f(x)$, τόσο ελαττώνεται η ισαπόσταση των γραμμών του φάσματος ω και αν μάλιστα θεωρήσουμε ότι $T \to \infty$, δηλ. η $f(x)$ τείνει να γίνει μη περιοδική, τότε ισοδύναμα $\omega \to \infty$, δηλ. η ισαπόσταση των φασματικών γραμμών τείνει να μηδενιστεί.

Γι'αυτό και στην περίπτωση αυτή που $T \to \infty$, οι φασματικές γραμμές (αρμονικές συχνότητες) προσεγγίζουν και τείνουν να απέχουν ελάχιστη – απειροστή απόσταση μεταξύ τους, έτσι ώστε το φάσμα της $f(x)$ από γραμμικό να γίνεται συνεχές. Δηλαδή τότε, η κατανομή των φασματικών γραμμών γίνεται συνεχείς και η σ.Fourier «μεταμορφώνεται», όπως θα δούμε, και αντικαθίσταται απ το λεγόμενο Ολοκλήρωμα Fourier.

<u>1.3 Ολοκλήρωμα FOURIER</u>

Κατά την ανάπτυξη μιας συνάρτησης $f(t)$ (θέτουμε t πλέον αντί για x) σε σειρά Fourier, θεωρούμε – σιωπηρώς βέβαια, ότι το διάστημα ορισμού $T=[-L,L]$ της $f(t)$ είναι πεπερασμένο, πράγμα όμως που ούτε στην πραγματικότητα ισχύει πάντα, αλλά και εύλογα εγείρεται ως ερώτημα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $T\to\infty$, δηλ. $T=(-\infty,\infty)=(-L,L)$, ήτοι $-\infty<t<\infty$. Τότε η Σειρά Fourier, γίνεται <u>Ολοκλήρωμα Fourier</u>, (δες προηγούμενη παρατ. 1.2.(ΙΙ)), ως εξής: Αποδεικνύεται ότι ισχύει το <u>θεώρημα (του ολοκληρώματος Fourier)</u>: «Αν μια συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη στο διάστημα $T=(-\infty,\infty)$, ικανοποιεί τις προϋπόθεσης:

α) Οι συναρτήσεις $f(t)$ και $f^{'}(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς σε κάθε πεπερασμένο διάστημα (συνθήκες Dirichlet) και

β) Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$, τότε η $f(t)$ γράφεται:

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cdot\cos(\omega t)+B(\omega)\cdot\sin(\omega t)]d\omega \qquad \text{όπου} \qquad A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\cos(\omega t)dt,$$

$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\sin(\omega t)dt$, **(7)** (Ολοκλήρωμα Fourier)

Η (7) ισχύει για κάθε σημείο συνέχειας t της $f(t)$ και <u>λέγεται ολοκλήρωμα Fourier της $f(t)$</u>, ενώ αν t_0 είναι σημείο ασυνέχειας της $f(t)$, τότε $f(t)=\frac{1}{2}\left[f\left(t_0^{+}\right)+f\left(t_0^{-}\right)\right]$, (7 α)».

Σημείωση : οι σχέσεις (7) και (7 α) είναι προφανώς ανάλογες των (1) και (2) των Σειρών Fourier, απ’οπου και η ομοιότητα μεταξύ ολοκληρώματος και Σειράς Fourier. Επίσης, όπως και στις Σειρές Fourier, το ολοκλήρωμα Fourier μιας άρτιας ή περιττής συνάρτησης, απλουστεύει κατά πολύ τους υπολογισμούς της (7), δηλαδή έχουμε:

$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(\omega t)\cdot\left[\int_{0}^{\infty}f(t)\cdot\cos(\omega t)dt\right]d\omega,\ \left(f(t)=\alpha\rho\tau\iota\alpha, B(\omega)=0\right)$, **(7 Β)**
$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin(\omega t)\cdot\left[\int_{0}^{\infty}f(t)\cdot\sin(\omega t)dt\right]d\omega,\ \left(f(t)=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\eta, A(\omega)=0\right)$, **(7 Γ)**

1.4. Άλλες εκφράσεις του Ολοκληρώματος Fourier

Το ολοκλήρωμα Fourier (7) μιας συνάρτησης $f(t)/(-\infty,\infty)$, αποδεικνύεται ότι μπορεί επίσης να γράφει στις μορφές:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega=0}^{\infty}\left[\int_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\cdot\cos(\omega(t-n))dn\right]d\omega \quad \textbf{(7 α)}$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega, \quad \textbf{(7 β)}}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{j\omega(t-n)}dn\cdot d\omega \quad \textbf{(7 γ)}$$

Προφανώς και εδώ, τα παραπάνω ισχύουν όπου $f(t)$ είναι συνεχείς, ενώ αν $f(t)$ είναι ασυνεχείς σ'ένα σημείο t_0 τότε η $f(t)$ ισούται με το ημιάθροισμα των πλευρικών ορίων της $f(t)$ στο t_0, δηλ. $f(t)=\frac{1}{2}\left[f\left(t_0^+\right)+f\left(t_0^-\right)\right]$.

1.5. Μετασχηματισμός FOURIER

Από το ολοκλήρωμα Fourier μιας συνάρτησης $f(t)/(-\infty,\infty)$, μπορεί να προκύψει ο Μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ ως εξής: Έστω το ολοκλήρωμα Fourier της $f(t)$ στην εκθετική – μιγαδική μορφή (7 β), δηλαδή $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$ όπου θέτουμε (την εντός της αγκύλης παράσταση ίση με $\Phi(\omega)$), $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{j\omega t}dt=\Phi(\omega)$, **(8)**, (Μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$).

Έτσι, ονομάζουμε Μετασχηματισμό Fourier (M.F) της $f(t)$, την άνω (8) οριζόμενη συνάρτηση $\Phi(\omega)$, ή όπως αλλιώς λέμε η $\Phi(\omega)$ είναι η μετασχηματισμένη κατά Fourier της $f(t)$.

Εξάλλου, από τις σχέσεις (8) και (7 β), παίρνουμε : $\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega}$, **(9)**, (Αντίστροφος M.F της $\Phi(\omega)$), που λέγεται αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier της $\Phi(\omega)$.

Συμβολικά αν F είναι ο τελεστής του M.F., τότε έχουμε την ισοδυναμία:

$$F\{f(t)\}\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\Phi(\omega)\Leftrightarrow F^{-1}\{\Phi(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega=f(t),\ \textbf{(10)},$$

και πιο αναλυτικά:

$$F:f(t)\rightarrow F\{f(t)\}\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\Phi(\omega)\Leftrightarrow F^{-1}:\Phi(\omega)\rightarrow$$

$$\rightarrow F^{-1}\{\Phi(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega=f(t),\ \textbf{(10 α)}$$

<u>Σημείωση:</u> Στις σχέσεις του ορθού και αντίστροφου M.F. (8) και (9), οι σταθεροί συντελεστές (προ των ολοκληρωμάτων) 1 και $\frac{1}{2\pi}$ αντίστοιχα, μπορούν να αντικατασταθούν απ οποιασδήποτε άλλες σταθερές που έχουν γινόμενο $\frac{1}{2\pi}$, (π.χ. τις $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ και $\frac{1}{\sqrt{\ }}$, κλπ)

1.6. Παρατηρήσεις στον Μ.F.

1)Σχέση Μετ. Laplace και Μετ. Fourier

Έστω η συνάρτηση

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{xt} \cdot f(t), \, για \; t > 0 \\ 0, \, για \; t < 0 \end{cases}$$

τότε ο Μετ. Laplace της $f_1(t)$, όπως ορίζεται γενικότερα για $s \in C$, ως γνωστόν είναι:

$$L\left\{e^{xt} \cdot f(t)\right\} = L\{f_1(t)\} \xrightarrow{ορ.} \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \left(e^{xt} \cdot f(t)\right)dt \xrightarrow{(s=x+j\omega)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+j\omega)t} \cdot \left(e^{xt} \cdot f(t)\right)dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{xt} \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \cdot f(t)dt = F\{f(t)\},$$ για

($t > 0$ και 0, για $t < 0$).

Δηλαδή : $\boxed{F\{f(t)\} = L\left\{e^{xt} \cdot f(t)\right\}}$, (για $t > 0$), **(11)**, (και 0, για $t < 0$), που σημαίνει ότι ο M.L. της συνάρτησης ($e^{xt} \cdot f(t)$) ισούται με τον M.F. της $f(t)$, (για $t > 0$).

Έτσι, η σχέση (11) δίνει τη συσχέτιση μεταξύ M.L και M.F και μάλιστα δείχνει ότι έχει νόημα η μεταβλητή – συνήθως $s \in R$ του M.L, να ορίζεται γενικότερα και ως μιγαδική $s \in C$.

(Ας σημειωθεί σχετικά, ότι ο M.L μια συνάρτησης $f(t)$ είναι ευρύτερα χρήσιμος στις εφαρμογές από ότι ο M.F., αφού είναι πιο σύνηθες στην πράξη να υπάρχει ο M.L δηλ. το γενικό ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \left|f(t)\right| \cdot e^{-\gamma t} dt$. Αντίθετα η ύπαρξη του M.F. δηλ. η σύγκλιση του $\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right| \cdot dt$, δεν συμβαίνει το ίδιο συχνά στις συναρτήσεις των εφαρμογών και μάλιστα σε αρκετές περιπτώσεις όταν υπάρχει ο M.F. μιας συνάρτησης αυτές εκφράζονται μέσω γενικευμένων συναρτήσεων (π.χ. $F\left\{t^{\nu}\right\} = 2\pi j^{\nu} \delta^{\nu}(\omega)$).

2) Είδαμε την αναλυτική έκφραση του αντίστροφου M.F. όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (9). Έτσι αντίστοιχα, για τον αντίστροφο M.L., βρίσκεται ότι: αν $L\{f(t)\} = \Phi(s)$, τότε

$L^{-1}\{\Phi(s)\} = f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{st} \cdot \Phi(s) ds$, για $t > 0$ και $f(t) = 0$ για $t < 0$, **(12)** που λέγεται ολοκληρωτικός τύπος του Bromwich.

Όπως όμως διαπιστώνουμε, ο αντίστροφος M.L. απαιτεί ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο (αφού μέσω του (12) οδηγεί σε μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\dfrac{1}{2\pi j}\Phi_C e^{st} \cdot \Phi(s) ds$ και σε ολοκληρωτικά υπόλοιπα – Residues), δηλ. σε δύσχρηστες συνήθως στην πράξη υπολογιστικές διαδικασίες.

Γι'αυτό και στις εφαρμογές, συνήθως αποφεύγεται η χρήση του τύπου (12) για την εύρεση του αντιστρόφου M.L. (όπως και το ίδιο γίνεται και για το σχετικά απλούστερο ολοκλήρωμα (9) του αντιστρόφου M.F.)

3) M.F. άρτιων – περιττών συναρτήσεων

Όπως και στις σειρές Fourier, όταν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή τότε οι τύποι του M.F απλουστεύονται. Πράγματι, αν $f(t)$ άρτια (δηλ. συμμετρική ως προς τον άξονα των y), είτε περιττή (δηλ. συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων), τότε αντίστοιχα έχουμε:

$F_C\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \Phi(\omega)$	M.F άρτιας ή συνημιτονικός, **(13)**
$F^{-1}\{\Phi(\omega)\} = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\omega) \cdot \cos(\omega t) dt$	

και

$F_s\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(\omega t) dt = \Phi(\omega)$	M.F περιττής ή ημιτονικός, **(14)**
$F^{-1}\{\Phi(\omega)\} = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\omega) \cdot \sin(\omega t) dt$	

Οι σχέσεις (13) και (14) ισχύουν επίσης και όταν μια συνάρτηση $f(t)$ επεκτείνεται σε συνημιτονικό ή ημιτονικό M.F. (δηλ. όταν η $f(t)$ είναι ορισμένη σε ένα μόνο από τους 2 ημιάξονες των t και την επεκτείνουμε στον άλλο συμμετρικά, έτσι ώστε η $f(t)$ να καθίσταται άρτια ή περιττή).

4) Φυσική ερμηνεία των M.F.

Όπως στον M.L . έτσι και στον M.F., ο ορθός και ο αντίστροφος M.F. (τύποι (8) και (9)), αποτελούν ένα ζεύγος αλληλοσυνδεόμενο (για τις τεχνολογικές συναρτήσεις, αμφιμονοσήμαντα). δηλ. είναι δυο μετασχηματισμοί – Συστήματα αλληλοαντιστρεφόμενα, όπου: Ο ορθός M.F (8) είναι ένα Σύστημα, που μετασχηματίζει ένα σήμα $f(t)$ στο σήμα – φάσμα συχνότητας του $\Phi(\omega)$, ενώ ο αντίστροφος M.F. (9) είναι το αντίστροφο Σύστημα που όταν ξέρουμε το φάσμα συχνοτήτων $\Phi(\omega)$ ενός σήματος μας ξαναδίνει το αρχικό σήμα $f(t)$.

Δηλαδή, η $f(t)$ μπορεί να εκπροσωπεί ένα ηλεκτρικό Σήμα (εισόδου) στο πεδίο του χρόνου t και η μετασχηματισμένη της $F\{f(t)\}=\Phi(\omega)$ να εκφράζει το Σήμα (εξόδου) των συχνοτήτων της $f(t)$, στο πεδίο συχνοτήτων ω.

άρα, η συνήθης φυσική σημασία του M.F. στις τεχνολογικές εφαρμογές, είναι: ο ορθός M.F. είναι ένα Σύστημα που αναλύει ένα Σήμα – ηλεκτρική κυματομορφή $f(t)$ σε ένα φάσμα συχνοτήτων $\Phi(\omega)$, ενώ ο αντίστροφος M.F είναι το αντίστροφο Σύστημα που συνθέτει αυτό το φάσμα και ξαναδίνει το αρχικό Σήμα – κυματομορφή $f(t)$, (γι'αυτό και η $\Phi(\omega)$ λέγεται και φασματική συνάρτηση ή απλά φάσμα της $f(t)$).

(Ας σημειωθεί εδώ, ότι το φάσμα συχνοτήτων μιας συνάρτησης – σήματος $f(t)$, δίνει μια άλλη οπτική γωνία για την εξέταση του σήματος $f(t)$, πολύ πιο «αποκαλυπτική» για την μελέτη του $f(t)$, γι'αυτό και η αμφίδρομη πορεία μεταξύ $f(t)$ και $\Phi(\omega)$ είναι, γενικότερα, πολύ χρήσιμη στις Εφαρμογές).

Εξάλλου, όπως είδαμε στα γενικά περί Σημάτων και Συστημάτων, αλλά και από τον ορισμό του M.F., γνωρίζουμε ότι ο $\Phi(\omega)$ μια $f(t)$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση, δηλαδή:

$$\Phi(\omega) \xrightarrow{(8)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \alpha + \beta j = \mathrm{Re}\{\Phi(\omega)\} + \mathrm{Im}\{\Phi(\omega)\} \cdot j = |\Phi(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

(15), όπου $|\Phi(\omega)|$ είναι το μέτρο και $\varphi(\omega)$ η φάση της.

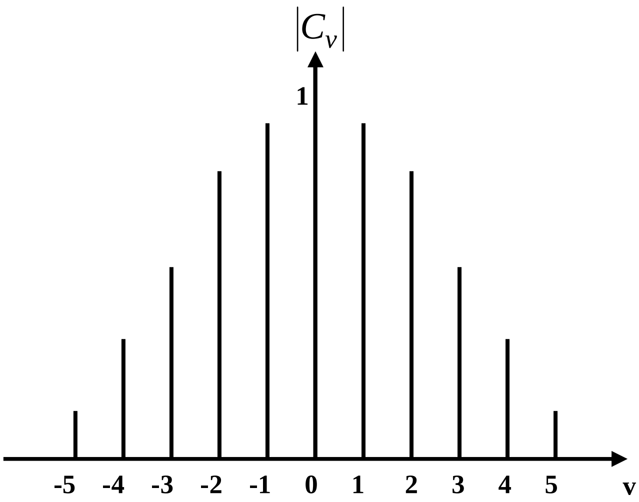
Τέλος, ο M.F. από τον ορισμό του είναι φανερό ότι αναφέρεται σε χρονοσυνεχή Σήματα – Συστήματα, (με κύριες τεχνολογικές εφαρμογές στις συναρτήσεις μεταφοράς των Γραμμικών Συστημάτων, στον σχεδιασμό αναλογικών φίλτρων, κλπ, όπως και ο M.L.).

Όμως σήμερα στην εποχή της ψηφιακής τεχνολογίας των Η/Υ, χρησιμοποιείται επίσης ευρέως στη μορφή του «Διακριτού M.F.» - (D.F.T) όπως και του «Ταχύ M.F.» - (F.F.T), μέσω της δειγματοληπτικής διαδικασίας (sampling), σε αρκετές τεχνολογικές εφαρμογές (όπως στα συστήματα Τηλεπικοινωνιών, στη διαμόρφωση Σημάτων, στον σχεδιασμό ψηφιακών φίλτρων, κλπ.)

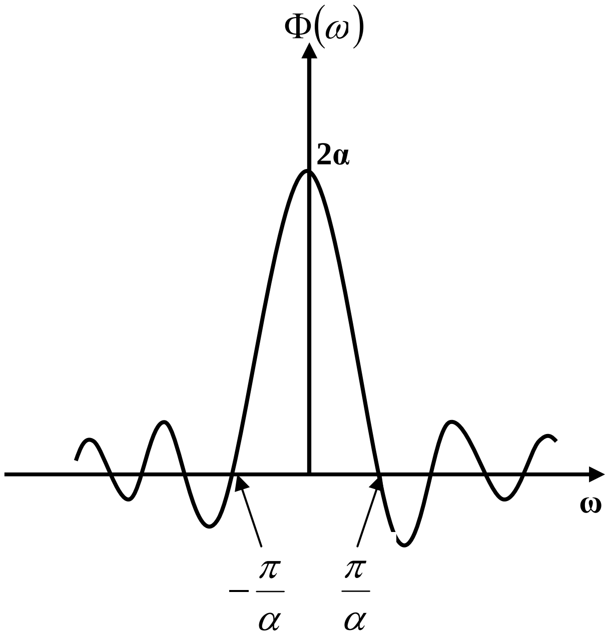
5) Είναι φανερό ότι, όπως θεωρούμε τον M.F. ως επέκταση των σειρών Fourier όταν $T \to \infty$, έτσι και οι Σειρές Fourier μπορούν να θεωρηθούν ως πεπερασμένοι Μετασχηματισμοί Fourier (περιορισμός του M.F.). Έτσι γενικά, με τον όρο «Αρμονική Ανάλυση» μιας συνάρτησης $f(t)$, εννοούμε την ανάλυση της $f(t)$ στο πεδίο των συχνοτήτων ω για κάθε περίπτωση, δηλ. είτε T πεπερασμένο, είτε $T \to \infty$.

Συμπερασματικά, οι Σειρές Fourier είναι πεπερασμένοι Μετασχηματισμοί Fourier και χρησιμοποιούνται όταν η ηλεκτρική κυματομορφή ορίζεται σε πεπερασμένο διάστημα και είναι (ή μπορεί να γίνει) περιοδική, ενώ όταν η κυματομορφή έχει άπειρη περίοδο $(-\infty, \infty)$ τότε χρησιμοποιούμε τους Μ.F. (που είναι επέκταση των σ. Fourier, για $T \to \infty$)

Τέλος, ενώ μια ηλεκτρική κυματομορφή αναλύεται στον παλμογράφο, το φάσμα συχνοτήτων της $f(t)$ δηλαδή $F\{f(t)\} = \Phi(\omega)$ αναλύεται στο φασματοσκόπιο και μάλιστα το φάσμα περιοδικής $f(t)$ μέσω σειράς Fourier είναι γραμμικό φάσμα, ενώ το φάσμα απεριοδικής $f(t)$ μέσω Μ.Fourier είναι συνεχές φάσμα συχνοτήτων. Σχετικά, δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα ενός γραμμικού και ενός συνεχούς φάσματος συχνοτήτων.



$f(t) = t,\ t \in (-\pi, \pi)$
(Γραμμικό Φάσμα)



$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

(Συνεχές Φάσμα)

1.7. Ιδιότητες του M.F

Όπως στον M.L είδαμε ότι ισχύουν ορισμένες σημαντικές ιδιότητες (με βασικότερη αυτή της Γραμμικότητας), ανάλογα και για τον M.F. αποδεικνύεται ότι ισχύουν επίσης οι εξής ιδιότητες:

I) Γραμμικότητα (δηλ. οι τελεστές F και F^{-1} είναι γραμμικοί):

$$\left.\begin{aligned} &F\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1F\{f_1(t)\}+c_2F\{f_2(t)\}=c_1\Phi_1(\omega)+c_2\Phi_2(\omega) \\ &\text{και} \\ &F^{-1}\{c_1\Phi_1(\omega)+c_2\Phi_2(\omega)\}=c_1F^{-1}\{\Phi_1(\omega)\}+c_2F^{-1}\{\Phi_2(\omega)\}=c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(16)}$$

Επίσης με $F\{f(t)\}=\Phi(\omega)\Leftrightarrow F^{-1}\{\Phi(\omega)\}=f(t)$ και $\alpha,\omega_0,t_0\in R$ τότε:

II) $F\{f(\alpha t)\}=\frac{1}{|\alpha|}\cdot\Phi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ και $F^{-1}\{\Phi(\alpha\omega)\}=\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, **(17)**

III) $F\{e^{j\omega_0 t}\cdot f(t)\}=\Phi(\omega-\omega_0)$ και $F^{-1}\{\Phi(\omega-\omega_0)\}=e^{j\omega_0 t}\cdot f(t)$, **(18)**

IV) $F\{f(t-t_0)\}=\Phi(\omega)\cdot e^{-j\omega_0 t}$ και $F^{-1}\{\Phi(\omega)\cdot e^{-j\omega_0 t}\}=f(t-t_0)$, **(19)**

V) $F\{f^{(v)}(t)\}=(j\omega)^v\cdot\Phi(\omega)$ και $f^{(v)}(t)=F^{-1}\{(j\omega)^v\cdot\Phi(\omega)\}$, **(20)**

VI) $\int_{-\infty}^{0}|f(t)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}|\Phi(\omega)|^2d\omega$, (Θεώρημα Parseval), **(21)**

1.8. Συνέλιξη M.F.

Όπως στον M.L., ανάλογα ορίζεται και στον M.F. η Συνέλιξη (ή Συνελικτικό γινόμενο ή Δίπλωση) δυο συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$, ως εξής: $\boxed{f*g\xrightarrow{\text{ορ.}}\int_{-\infty}^{0}f(u)\cdot g(t-u)du,\ \mathbf{(22)}}$

Σχετικά ισχύει το <u>θεώρημα της Συνέλιξης</u>: $F\{f*g\}=F\{f\}\cdot F\{g\}$, απ'οπου ισοδύναμα: $F^{-1}\{F\{f*g\}\}=F^{-1}\{F\{f\}\cdot F\{g\}\}\Leftrightarrow f*g=F^{-1}\{\Phi(\omega)\cdot G(\omega)\}$,**(22α)**

Γενικότερα : $F\{f_1*f_2*.......f_v\}=F\{f_1\}\cdot F\{f_2\}\cdot......F\{f_v\}$. Εξάλλου, όπως στον M.L έτσι και στον M.F. ισχύουν οι ιδιότητες:

A) **της αντιμεταθετικότητας** $[f*g=g*f]$,

B) **της προσεταιριστικότητας** $[f*(g*h)=(f*g)*h]$ και

Γ) **της επιμεριστικότητας** $[f*(g+h)=(f*g)+(f*h)]$.

Τέλος, αντίστροφα ισχύει: $F^{-1}\{\Phi(\omega)*G(\omega)\}=2\pi\cdot f(t)\cdot g(t)$, **(22 β)**

2. Παραδείγματα – Εφαρμογές στον M.F.

1) α) Να βρεθεί ο Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t)=\begin{cases} 1, \text{όταν } |t|<\alpha \\ \\ 0, \text{όταν } |t|>\alpha \end{cases}$$

β) Να γίνουν τα γραφήματα της $f(t)$ και $F\{f(t)\}$, για α=1.

Λύση:

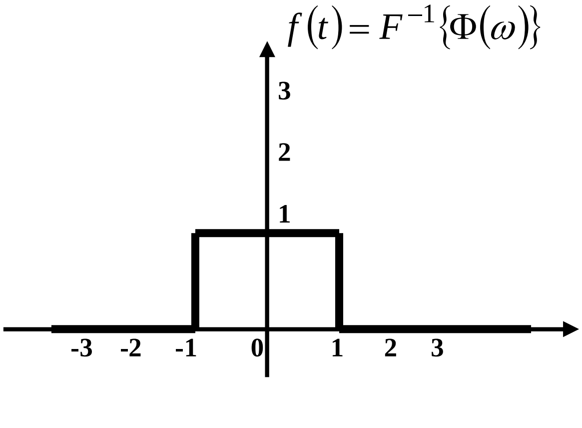
α) $F\{f(t)\}=\Phi(\omega)\xrightarrow{\text{ορ}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{-\alpha}0\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{-a}^{a}1\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{a}^{+\infty}0\cdot e^{-j\omega t}dt=$

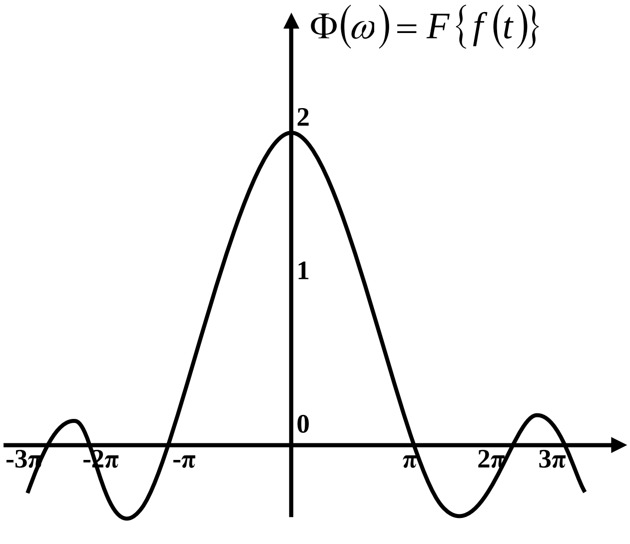
$=\int_{-a}^{a}e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}\cdot\left[e^{-j\omega t}\right]_{-a}^{a}=\frac{-1}{j\omega}\left(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega}\right)=\frac{e^{ja\omega}-e^{-ja\omega}}{j\omega}=2\frac{\sin(a\omega)}{\omega},(\omega\neq 0).$

(Ενώ, για $\omega=0$ παίρνουμε : $\lim\limits_{\omega\to 0}(\Phi(\omega))=\lim\limits_{\omega\to 0}\left(2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\right)=2a\lim\limits_{\omega\to 0}\left(\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}\right)=$

$=2a\cdot(1)=2a$).

β) Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις, για α=1, είναι:





2) Να βρεθεί ο M.F. της συνάρτησης, (με α>0, σταθερά):

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at}, t>0 \\ 0, t<0 \end{cases} \quad \text{ή αλλιώς} \quad \begin{cases} f(t)=e^{-at}\cdot u(t) \\ \text{Όπου } u(t)=\begin{cases} 1, t>0 \\ 0, t<0 \end{cases} \end{cases}$$

(Μοναδιαία βηματική συνάρτηση)

Λύση:

$$F\{f(t)\} \xrightarrow{(8)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} = \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{\frac{1}{\infty}-1}\right] = \frac{1}{a+j\omega} = \Phi(\omega).$$

(Σημείωση : Η $\Phi(\omega)$ έχει αντίστροφο M.F. την $f(t)$, δηλ. :

$$F^{-1}\{\Phi(\omega)\} = f(t) \xrightarrow{(9)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{a+j\omega}d\omega).$$

3) Να υπολογιστεί $F\left\{e^{-a|t|}\right\},\ a>0$.

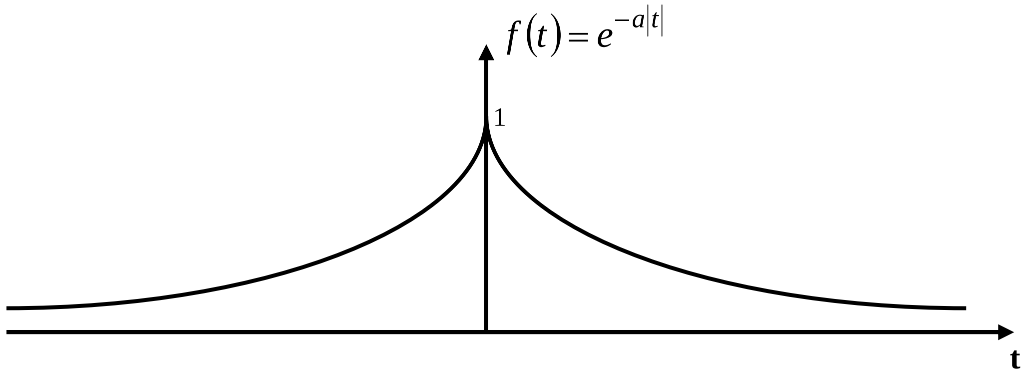
<u>Λύση:</u>

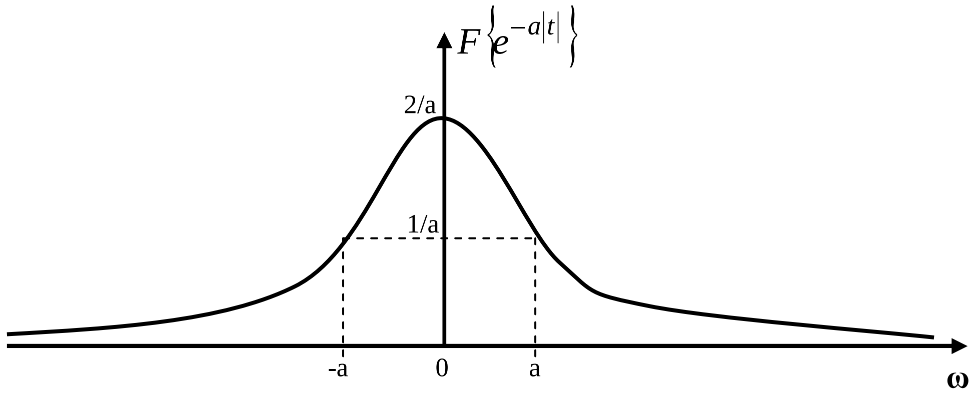
$$F\left\{e^{-a|t|}\right\}\xrightarrow{((8))}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt=$$

$$\frac{1}{a-j\omega}\left[e^{(a-j\omega)t}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{a-j\omega}\left[e^{0}-0\right]+\frac{-1}{a+j\omega}\left[0-1\right]=$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

(Στα παρακάτω σχήματα, δίνονται τα γραφήματα της $f(t)=e^{-a|t|}$ και της $F\{f(t)\}=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$).





4) Να υπολογιστεί ο Μ.F. της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης του Dirac, $\delta(t)$.

Λύση:

Ως γνωστόν, η χρονοσυνεχής μοναδιαία κρουστική συνάρτηση του Dirac (ή μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δέλτα), $\delta(t)$, ορίζεται ως Γενικευμένη συνάρτηση (και όχι ως συνήθης συνάρτηση), ως εξής:

$$\delta(t)=\begin{cases} 1, t=0 \\ \\ 0, t\neq 0 \end{cases} \quad \text{, με } \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1, \textbf{(23)}$$

Οπότε ο Μ.F.της $\delta(t)$ είναι:

$$F\{\delta(t)\}\xrightarrow{op.}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\left\{e^{-j\omega t}\right\}_{t=0}=1=\Phi_{\delta}(\omega), \textbf{(23 α)}$$

Σημείωση: Ο αντίστροφος Μ.F. από την (23 α),

$$F^{-1}\{\Phi_{\delta}(\omega)\}=F^{-1}\{1\}=\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega, \textbf{(23 β)}$$

Εξάλλου, θεωρώντας τη συνάρτηση Dirac στη μορφή $[\delta(t-t_0)=0, t\neq t_0]$, επίσης παίρνουμε:

$$F\{\delta(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\cdot e^{-j\omega t}dt=\left\{e^{-j\omega t}\right\}_{t=t_0}=e^{-j\omega t_0}$$, οπότε αντίστροφα :

$$\delta(t-t_0)=F^{-1}\left\{e^{-j\omega t_0}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega.$$

Παρατηρήσεις στην $\delta(t)$: Η $\delta(t)$ δεν έχει φυσική υπόσταση και δεν είναι συνάρτηση με τη συνήθη μαθηματική έννοια, αλλά είναι μια ειδική συνάρτηση απ'αυτές που στα Μαθηματικά αποτελούν τις λεγόμενες «Γενικευμένες Συναρτήσεις» ή Κατανομές. Δηλ. είναι μια συμβολική συνάρτηση θα λέγαμε, που εκφράζει την επίδραση απείρως μεγάλων μεγεθών, που επενεργούν όμως για ελάχιστο (οριακά μηδενικό) χρόνο.

Η συνάρτηση $\delta(t)$ που λέγεται και μοναδιαία ώση (κρούση), είναι ένα σημαντικό μαθηματικό σύμβολο – συνάρτηση, που χρησιμεύει για την περιγραφή των λεγόμενων «παροδικών» φαινομένων, όπως π.χ. τα παροδικά ρεύματα που παρατηρούνται κατά το άνοιγμα ή το κλείσιμο ενός ηλεκτρικού κυκλώματος.

(Τα παροδικά φαινόμενα παρατηρούνται συνήθως στο μεταβατικό στάδιο που μεσολαβεί, κατά την απότομη μεταβολή της κατάστασης ενός Συστήματος, σε κάποια άλλη κατάσταση. Τα παροδικά φαινόμενα είναι αρκετά συχνά σε διάφορους τομείς των τεχνολογικών εφαρμογών, όπως στα ηλεκτρικά Σήματα – Συστήματα, στην Ηλεκτρονική Φυσική, στην Οπτική, κλπ.).

Ορισμένες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες της $\delta(t)$, (για $f(t)$ συνεχή συνάρτηση). είναι:

I) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot f(t)dt = f(0),\ \mathbf{(24)}}$ όπου το ολοκλήρωμα όμως δεν έχει τη συνήθη έννοια, αλλά ότι η $\delta(t)$ επιδρά επί της $f(t)$ έτσι ώστε αυτό να πάρει την τιμή $f(0)$, ή με αλλά λόγια ότι το ολοκλήρωμα και η $\delta(t)$ καθορίζονται από την τιμή $f(0)$.

II) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+t_0)\cdot\delta(t)dt = f(t_0)$, **(25)**

III) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\delta(t)dt = \frac{1}{|a|}f(0)$, **(26)**

IV) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t),\ \delta(-t) = \delta(t),\ f(t)\cdot\delta(t) = f(u)\cdot\delta(t),\ t\cdot\delta(t) = 0$, **(27)**

V) $\int_{a}^{\beta} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0), & t\in(\alpha,\beta) \\ 0, & t\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$, και $\int_{\alpha}^{\beta}\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} 1, & t\in(\alpha,\beta) \\ 0, & t\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$ **(28)**

VI) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\cdot f(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot f'(t)dt = -f'(0)$, με $\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$ και $f'(0) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$

όπου η $\delta'(t)$ είναι συμβολική συνάρτηση, που ενεργεί έτσι ώστε η $f(t)$ να πάρει τη τιμή $(-f(0))$, **(29)**

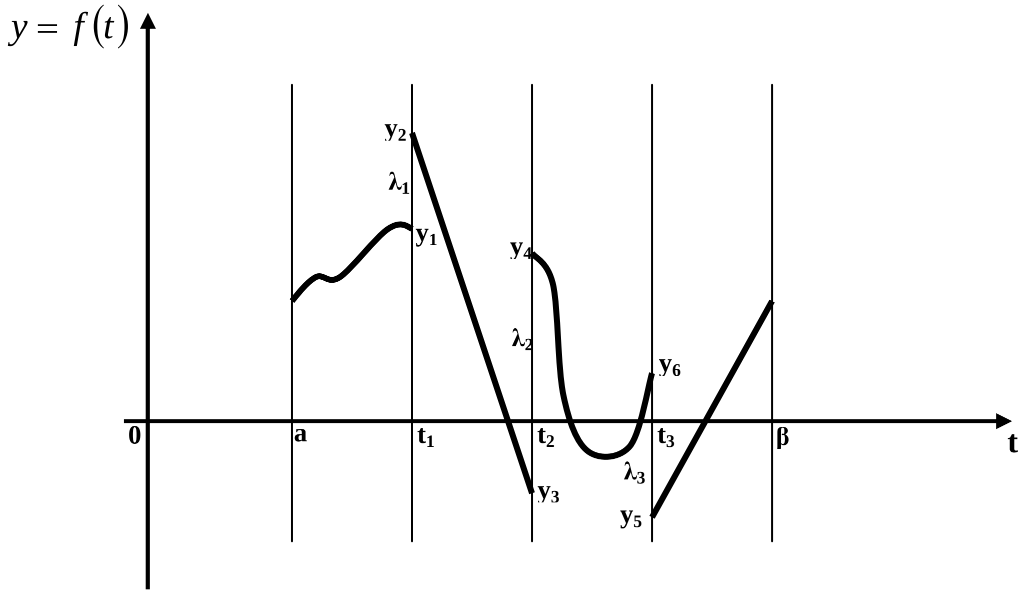
VII) $\delta(t) = u'(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, **(30)**, δηλαδή η $\delta(t)$ είναι η παραγωγός της $u(t)$, όπου $u(t)$ η γνωστή μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0\end{cases}$

VIII) Αν μια συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής σ'ένα διάστημα $\alpha \le t \le \beta$, με ασυνέχειες άλματος ύψους $\lambda_1, \lambda_2, ...$ στα σημεία $t_1, t_2, ...$, τότε η «γενικευμένη παραγωγό» $f_\gamma^{'}(t)$ της $f(t)$, είναι:

$$\boxed{f_\gamma^{'}(t) = f^{'}(t) + \sum_\kappa \lambda\kappa \cdot \delta(t - t_\kappa), \text{ } \mathbf{(31)}.}$$

(όπου $f^{'}(t)$ είναι η συνήθης παραγωγός της $f(t)$ όπου υπάρχει).

Π.χ. έστω η $y = f(t)/[\alpha, \beta]$, τμηματικά συνεχής συνάρτηση του παρακάτω σχήματος, με ασυνέχειες στα σημεία t_1, t_2, t_3 και με άλματα ασυνέχειας $\lambda_1 = y_2 - y_1$, $\lambda_2 = y_4 - y_3$ και $\lambda_3 = y_6 - y_5$, αντίστοιχα.



άρα:

$$f_\gamma^{'}(t) = f^{'}(t) + \sum_{\kappa=1}^{3} \lambda\kappa \cdot \delta(t - t_\kappa) = f^{'}(t) + [\lambda_1 \cdot \delta(t - t_1) + \lambda_2 \cdot \delta(t - t_2) + \lambda_3 \cdot \delta(t - t_3)].$$

5) Να βρεθεί ο M.F της σταθερής συνάρτησης $f(t)=C$.

<u>Λύση</u>:

$$F\{C\}=\int_{-\infty}^{\infty} C\cdot e^{-j\omega t}dt=2\pi C\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t}dt\right]\xrightarrow{\delta\varepsilon\varsigma\ \pi\rho o\eta\gamma.\pi\alpha\rho\alpha\delta.(\Gamma)} 2\pi C[\delta(-\omega)]=2\pi C\cdot\delta(\omega)$$

αφού $\delta(-\omega)=\delta(\omega)$

<u>Σημείωση</u>: Για $C=1: F\{1\}=2\pi\cdot\delta(\omega)$, οπότε επειδή $F\left\{e^{j\omega_0 t}\cdot g(t)\right\}=F(\omega-\omega_0)$, (δες ιδιότητες M.F. (18)) άρα: $F\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}=2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)$, **(32)**.

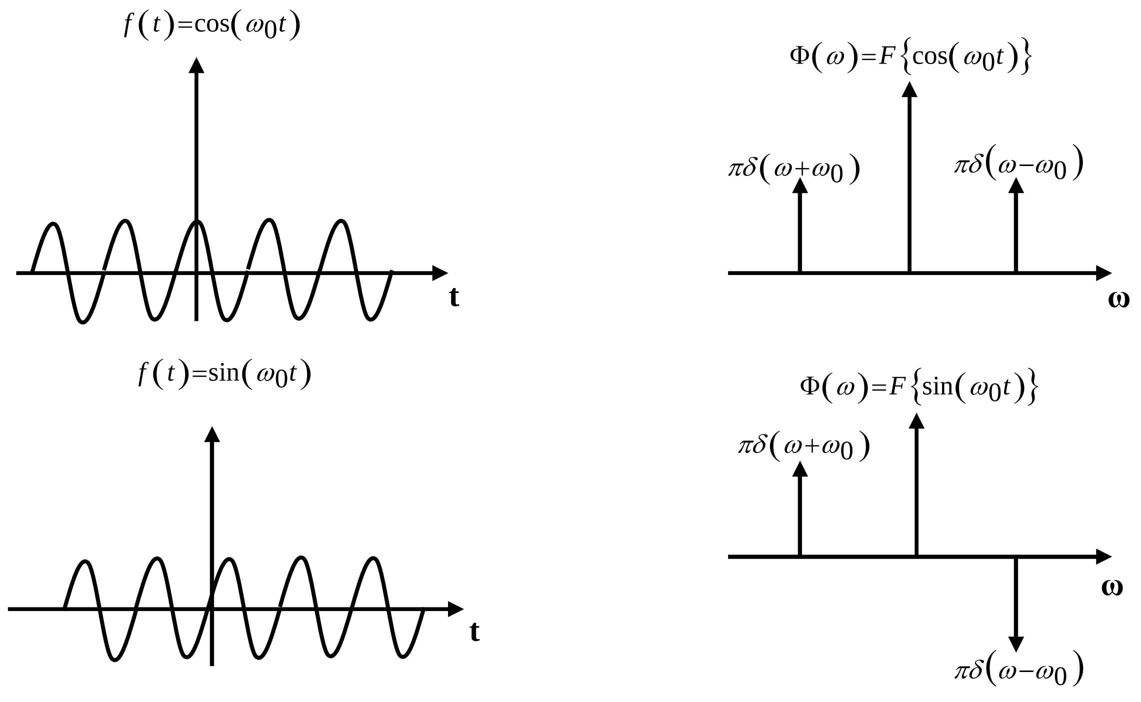
6) Να υπολογιστούν οι M.F των συναρτήσεων α) $\cos(\omega_0 t)$ και β) $\sin(\omega_0 t)$ και γ) να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις τους.

<u>Λύση:</u>

A) $F\{\cos(\omega_0 t)\}=F\left\{\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}F\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}+\dfrac{1}{2}F\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}\xrightarrow{\pi\rho o\eta\gamma.\pi\alpha\rho\alpha\delta.}$
$\rightarrow \pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)+\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)$.

B) Όμοια : $F\{\sin(\omega_0 t)\}=F\left\{\dfrac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\}=\dfrac{1}{2j}\left[2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$=-j\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)$.

Γ) Οι γραφικές παραστάσεις των $\cos(\omega_0 t)$ και $\sin(\omega_0 t)$ και των M.F. αυτών είναι:



7) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης

$$f(t)=\begin{cases} 1, |t|<1 \\ 0, |t|>1 \end{cases} \qquad \text{(ορθογωνικός παλμός)}$$

Λύση:

Επειδή η $f(t)$ είναι προφανώς άρτια και μη περιοδική, σχέση (7) που δίνει το ολοκλήρωμα Fourier, απλουστεύεται (όπως και στις σειρές Fourier) και δίνεται όπως είδαμε από την (7 β), ήτοι:

$$B(\omega)=0 \text{ και } f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\left[\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega t)dt\right]d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\left[\int_0^1 1\cdot\cos(\omega t)dt+\int_1^\infty 0\cdot\cos(\omega t)dt\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^1 d\omega=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\begin{cases} 1, \gamma\iota\alpha\ |t|<1 \\ 1/2, \gamma\iota\alpha\ |t|=1 \\ 0, \gamma\iota\alpha\ |t|>1 \end{cases} \text{ όπου } \int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\begin{cases} \pi/2, \gamma\iota\alpha\ |t|<1 \\ \pi/4, \gamma\iota\alpha\ |t|=1 \\ 0, \gamma\iota\alpha\ |t|>1 \end{cases} \quad ,\text{A}^*$$

Παρατήρηση Ι: Για την τιμή του ολοκληρώματος (Α), έχουμε :

Α) Για $|t|<1$ δηλ. $t\in(-1,1)$, είναι $f(t)\xrightarrow{\text{ορ.}}1$, όποτε :

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=1\Leftrightarrow\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

Β) Για $|t|=1$, δηλ. $t=\pm1$ (που είναι σημεία ασυνέχειας της $f(t)$), είναι (σύμφωνα με το θεώρημα Fourier):

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[f(1^+)+f(1^-)\right]=\frac{1}{2}[0+1]=\frac{1}{2} \text{ και } f(t)=\frac{1}{2}\left[f(-1^+)+f(-1^-)\right]=\frac{1}{2}[0+1]=\frac{1}{2},$$

άρα, για $|t|=1\Rightarrow f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega)}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

Γ) Για $|t|>1$, δηλ. $t\notin(-1,1)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, είναι $f(t)\xrightarrow{\text{ορ.}}0$, όποτε:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=0\Leftrightarrow\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=0$$

Παρατήρηση ΙΙ: Με χρήση του MATLAB, το παραπάνω ολοκλήρωμα (Α), δίνεται: $\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\frac{1}{4}\pi\cdot signum(t+1)-\frac{1}{4}\pi\cdot signum(t-1)$. (Δες σχετικά και επόμενο παράδειγμα (8) – συνάρτηση πρόσημου signum(t))

Παρατήρηση ΙΙΙ:Μέσω των Μ.F. μπορούμε να υπολογίσουμε μερικά «δύσκολα» γενικευμένα ολοκληρώματα, π.χ. βρήκαμε εδώ ότι $f(t)=\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cdot\cos(\omega t)}{\omega}d\omega$.

Θεωρώντας $t=0$, οπότε $f(t)=1$, παίρνουμε:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=1\Rightarrow\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

8) **M.F της συνάρτησης πρόσημου «signum (t)»**

Καταρχήν, ονομάζουμε Συνάρτηση πρόσημου «$signum(t)$» και συμβολίζουμε $\operatorname{sgn}(t)$ τη συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

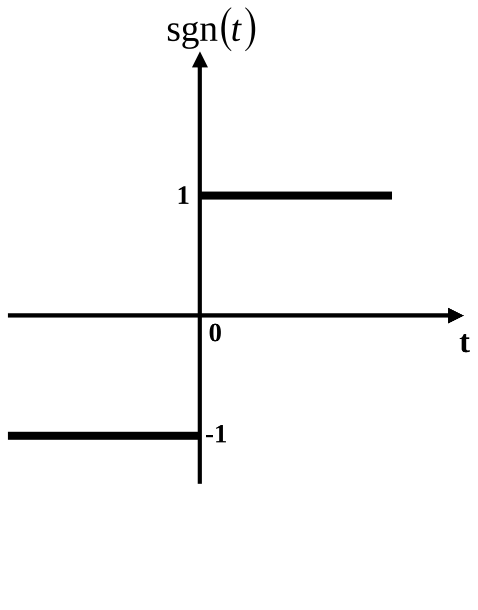
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, \gamma\iota\alpha\ t > 0 \\ -1, \gamma\iota\alpha\ t < 0 \end{cases} \quad \mathbf{,(33)}$$

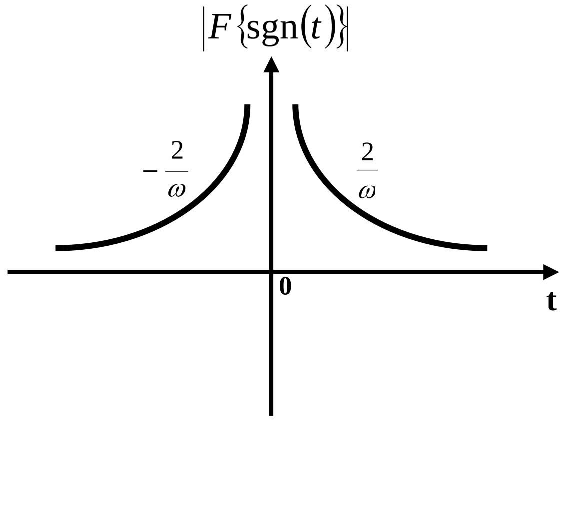
Η συνάρτηση signum (t) ανήκει στην κατηγόρια των λεγόμενων «Ειδικών Συναρτήσεων», είναι πολύ σημαντική και χρήσιμη για την Ανάλυση Fourier (αλλά και για τα σήματα γενικότερα) και είναι προφανώς περιττή (άρα ο M.F θα είναι καθαρά φανταστική συνάρτηση και περιττή επίσης). Η γενικευμένη παράγωγος $\operatorname{sgn}'_\gamma(t)$ της (33), (δες παράδειγμα 4, παρατηρήσεις , ιδιότητες VIII της $\delta(t)$), είναι:

$$\operatorname{sgn}'_\gamma(t) = \operatorname{sgn}'(t) + \sum_\kappa \lambda\kappa \cdot \delta(t - t_\kappa) = 0 + \sum_{\kappa=1} \lambda \cdot \delta(t - t_1) = 0 + (1 - (-1)) \cdot \delta(t - 0) = 2\delta(t)$$

Οπότε : $F\{\operatorname{sgn}'_\gamma(t)\} = (j\omega) \cdot F\{\operatorname{sgn}(t)\}$, (δες ιδιότητες M.F. V) και $F\{\operatorname{sgn}'_\gamma(t)\} = F\{2 \cdot \delta(t)\} = 2 \cdot F\{\delta(t)\} = 2 \cdot 1 = 2$ άρα: $\boxed{F\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}, \mathbf{(33\ \alpha)}.}$

Εξάλλου, $\operatorname{sgn}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega$. Τέλος, τα γραφήματα της $\operatorname{sgn}(t)$ και του φάσματος αυτής, είναι:





9) Να υπολογιστούν ο ημιτονικός και ο συνημιτονικός M.F. της συνάρτησης $f(t)=e^{-t}$, για t>0.

<u>Λύση</u>

α) Λέγοντας ημιτονικό M.F εννοείται, ως γνωστόν, ότι η $f(t)$ που ορίζεται μόνο στον θετικό ημιάξονα των t, ότι επεκτείνεται και στον αρνητικό ημιάξονα, έτσι ώστε η f να γίνει περιττή (δηλ. συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων)

Οπότε θα ισχύει ο τύπος (14), δηλ.:

$$F_s\{f(t)\}=\Phi(\omega)=\int_0^\infty f(t)\cdot\sin(\omega t)dt=\int_0^\infty e^{-t}\cdot\sin(\omega t)dt=\left.\frac{e^{-t}\left[-\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)\right]}{\left(-1^2\right)+\omega^2}\right|_0^\infty=$$

αφού είναι : $\left[\int e^{at}\cdot\sin(\beta t)dt=\frac{e^{at}\left[a\sin(\beta t)-\beta\cos(\beta t)\right]}{\alpha^2+\beta^2}\right]=....=\frac{\omega}{1+\omega^2}$.

β) Όμοια, για τον συνημιτονικό M.F της $f(t)$, εννοείται ότι αυτή επεκτείνεται στον αρνητικό ημιάξονα έτσι ώστε να καταστεί άρτια (δηλ. συμμετρική ως προς τον άξονα της εξαρτημένης μεταβλητής)

Οπότε θα ισχύει ο τύπος (13), δηλ.:

$$F_C\{f(t)\}=\Phi(\omega)=\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega t)dt=\int_0^\infty e^{-t}\cdot\cos(\omega t)dt=\left.\frac{e^{-t}\left[-\cos(\omega t)+\omega\cdot\sin(\omega t)\right]}{(-1)^2+\omega^2}\right|_0^\infty=$$

αφού είναι: $\left[\int e^{at}\cdot\cos(\beta t)dt=\frac{e^{at}\left[a\cos(\beta t)-\beta\sin(\beta t)\right]}{\alpha^2+\beta^2}\right]=..=\frac{1}{1+\omega^2}$.

10) Να υπολογιστεί ο M.F περιοδικής συνάρτησης $f(t)$ με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Λύση:

Ως γνωστόν, μια περιοδική συνάρτηση $f(t)$, με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$, αναλύεται σε σειρά Fourier (στη μιγαδική μορφή), ως εξής:

$f(t)=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}\gamma_\nu\cdot F\left\{e^{j\nu\omega_0 t}\right\}\Leftrightarrow$ οπότε παίρνουμε τον M.F., έχουμε :

$$F\{f(t)\}=F\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\gamma_\nu\cdot e^{j\nu\omega_0 t}\right\}\Leftrightarrow F\{f(t)\}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\gamma_\nu\cdot F\left\{e^{j\nu\omega_0 t}\right\}\Leftrightarrow$$

(δες παράδειγμα (5), (32) $F\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}=2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)$)

$$\boxed{\Leftrightarrow\Phi(\omega)=2\pi\cdot\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\gamma_\nu\cdot\delta(\omega-\nu\omega_0)\ ,\mathbf{(34)}}$$ (M.F περιοδικής συνάρτησης)

(**<u>Συμπέρασμα</u>**: Ο M.F περιοδικής συνάρτησης, είναι μια ακολουθία ώσεων (δηλ. φασματικών γραμμών), που βρίσκονται στις αρμονικές συχνότητες της συνάρτησης και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά ω_0)

<u>Παρατήρηση</u>: Είδαμε ότι το ολοκλήρωμα Fourier, μπορεί να θεωρηθεί ως μια οριακή Σειρά Fourier, όταν $T\to\infty$. Στο παραπάνω παράδειγμα είδαμε ότι έχει νόημα επίσης, να μιλάμε για τον M.F. περιοδικής συνάρτηση, που βρήκαμε ότι δίνεται από τη γενικευμένη συνάρτηση (34). Γι'αυτό, σε κάθε περίπτωση, μιλάμε γενικά για την αρμονική ανάλυση Fourier, είτε η $f(t)$ είναι περιοδική, είτε όχι.

11) Να αποδειχτεί το θεώρημα του ολοκληρώματος Fourier, με την εξής έννοια: αν $f(t)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $T=[-L,L]$, που η περιοδική επέκταση της αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier, τότε για $L\to\infty$, η Σειρά Fourier της $f(t)$ «μετατρέπεται» στο ολοκλήρωμα Fourier της $f(t)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $g(t)$ η περιοδική επέκταση της $f(t)$, δηλαδή

$$\left\{\begin{array}{l} g(t)=f(t), \forall t\in(-L,L)=T \\ \kappa\alpha\iota \\ g(t)=g(t+T), \forall t\in R \end{array}\right\}$$

Έστω επίσης η Σειρά Fourier της $g(t)$, στην εκθετική – μιγαδική μορφή: $g(t)\xrightarrow{(4)}\sum_{v=-\infty}^{\infty}G_v\cdot e^{jv\omega_0 t}$, (I), όπου $G_v=\dfrac{1}{T}\int_{-L}^{L}g(t)\cdot e^{-jv\omega_0 t}dt$, (II), και $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$, (III), $(v\in Z)$.

Η (I) λόγω της (II), γίνεται : $g(t)=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{T}\int_{-L}^{L}g(t)\cdot e^{-jv\omega_0 t}dt\right]\cdot e^{jv\omega_0 t}$, (IV), όπου η συχνότητα του γενικού όρου είναι: $\dfrac{2\pi v}{T}=v\omega_0=\omega_v$, οπότε η διάφορα της συχνότητας μεταξύ διαδοχικών οπών είναι: $\dfrac{2\pi}{T}[(v+1)-v]=\dfrac{2\pi}{T}=\Delta\omega$, (δηλ. $\Delta\omega=\omega_0$).

Αφού $\Delta\omega=\omega_0$, τότε η (VI) γίνεται : $g(t)=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}g(t)\cdot e^{-j\omega_v t}dt\right]\cdot e^{j\omega_v t}\cdot\Delta\omega$, (V), όπου θέτοντας $G(\omega)=\int_{-L}^{L}g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$, παίρνουμε $:g(t)=\dfrac{1}{2\pi}\sum_{v=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_v t}\cdot G(\omega_v)\cdot\Delta(\omega)$. Θεωρώντας ότι $L\to\infty$ δηλ. $T\to\infty$, τότε $g(t)=f(t), \forall t\in R, \kappa\alpha\iota\ \Delta\omega\to 0$. Οπότε η (V) γίνεται $:g(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\dfrac{1}{2\pi}\sum_{v=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_v t}\cdot G(\omega_v)\cdot\Delta\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\cdot G(\omega)d\omega$, απ'οπου τελικά : $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega$, (δηλ. (7 β))

12) Να βρεθεί ο M.F του σήματος

$$f(t) = \begin{cases} A, |t| \le T \\ 0, |t| > T \end{cases}$$ (ορθογώνιος παλμός – rectangular pulse)

Λύση:

Σε συνεχεία και γενίκευση του παραδείγματος (7), από τον ορισμό του M.F. (8), βρίσκουμε: $F\{f(t)\} = \int_{-T}^{T} A \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[-\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-T}^{T} =$

$= \frac{2A\sin(\omega T)}{\omega} = 2AT \cdot \sin C(\omega T)$, όπου η συνάρτηση «sinC”, ορίζεται ως εξής:

$$\sin C(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ οπου } x \ne 0 \\ 1, \text{ οταν } x = 0 \end{cases}$$

13) Να βρεθεί ο M.F της συνάρτησης $f(t) = 1,\ t \in R$.

Λύση:

Προφανώς η περιοχή μεταξύ του γραφήματος της $f(t) = 1$ και του άξονα των t, είναι άπειρη (μη μετρήσιμη), ή ισοδύναμα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ αποκλίνει. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση $f(t) = 1,\ t \in R$, δεν έχει Μετασχηματισμό Fourier.

Το ίδιο επαληθεύεται βέβαια και μέσω του ορισμού του M.F. Πράγματι: $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \lim_{u \to \infty} \int_{-u}^{u} e^{-j\omega t} dt = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega u} \right) \right] = \lim_{u \to \infty} \frac{2\sin(\omega u)}{\omega}$, ένα όριο δηλ. που δεν υπάρχει, (αφού το ημιτόνιο απείρου τόξου δεν υπάρχει). Άρα η $f(t) = 1,\ t \in R$, δεν αναλύεται αρμονικά.

14) α) Να βρεθούν τα φάσματα «πλάτους» και «φάσης», του σήματος: $f(t)=e^{-at}\cdot H(t), (a>0)$.

όπου $H(t)=\begin{cases}1, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$ μοναδιαία νηματική του Heaviside – unit step Heaviside function, ή $u(t)$)

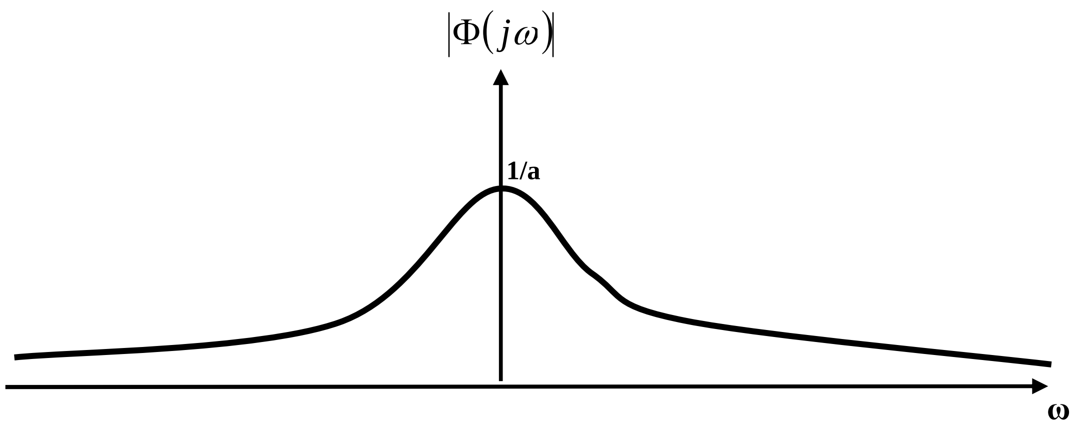
β) Να δοθούν τα γραφήματα των φασμάτων αυτών.

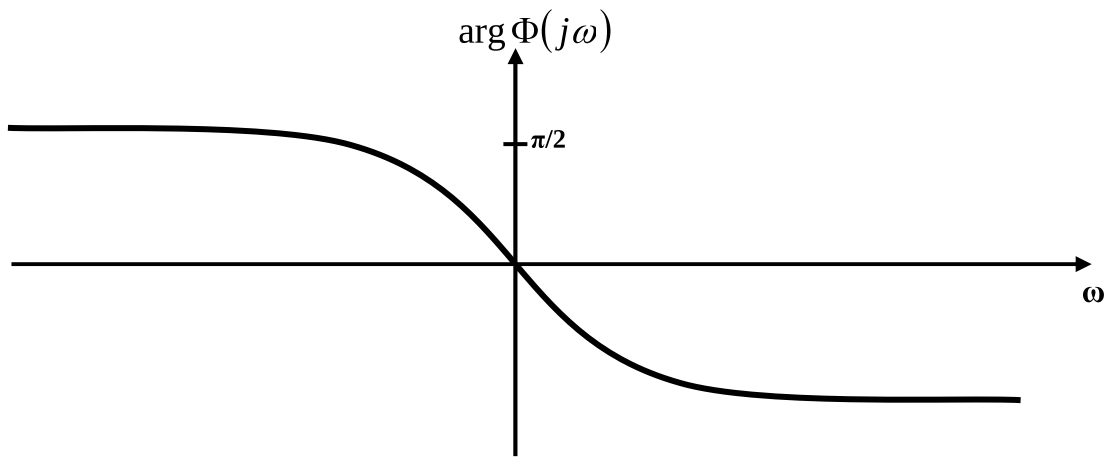
Λύση:

α) $F\{f(t)\}=\Phi(j\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$, οπότε το μέτρο (πλάτος) της είναι : $|\Phi(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ και το όρισμα (φάση) της είναι : $\arg\Phi(j\omega)=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$, αφού γενικά: $\boxed{\Phi(j\omega)=|\Phi(j\omega)|\cdot e^{j\cdot\arg\Phi(j\omega)}.}$

(Συχνά, αντί για $\Phi(\omega)$, γράφουμε $\Phi(j\omega)$, αφού η μεταβλητή ω εμφανίζεται σ'αυτες της συναρτήσεις ως γινόμενο επί την φανταστική μονάδα $j=\sqrt{-1}$)

β) Τα φάσματα «πλάτους – μέτρου» και «φάσης – ορίσματος», δίνονται στα παρακάτω γραφήματα:





15) Για το σήμα – συνάρτηση του παραδείγματος (12)

$$f(t)= \begin{cases} A, |t| \le T \\ 0, |t| > T \end{cases} \text{(ορθογώνιος παλμός)}$$

α) Να υπολογιστεί το φάσμα «πλάτους» και το φάσμα «φάσης» της $f(t)$.

β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις :

I) του φάσματος «πλάτους» της $f(t)$, δηλ. της $|\Phi(j\omega)|$

II) του φάσματος «φάσης» της $f(t)$, δηλ. $\Phi(j\omega)$.

III) του φάσματος συχνότητας της $f(t)$, δηλ. της $F\{f(t)\} = \Phi(j\omega)$, και

IV) της $f(t)$.

<u>Λύση:</u>

α) Στο παράδειγμα (12) βρήκαμε ότι:

$$\Phi(j\omega) = F\{f(t)\} = \frac{2A}{\omega}\sin(\omega T) = 2AT \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = 2AT \cdot \sin C(\omega T), \text{ όπου}$$

$$\sin C(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \; οπου \; x \neq 0 \\ 1, \; οταν \; x = 0 \end{cases}$$

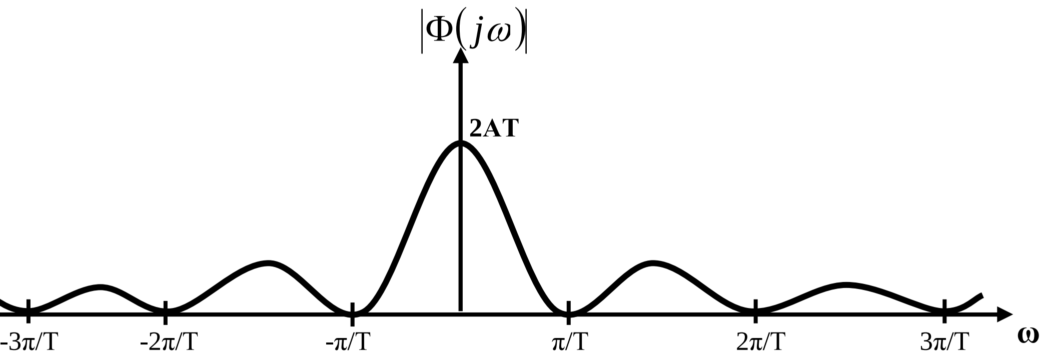
Οπότε το φάσμα μέτρου (Amplitude spectrum), είναι: $|\Phi(j\omega)| = \sqrt{(2AT \cdot \sin C(\omega T))^2 + 0^2} = 2AT \cdot |\sin C(\omega T)|$, και το φάσμα φάσης (phase spectrum) :

$$\arg \Phi(j\omega) = \begin{cases} 0, (\sin C(\omega T) \ge 0) \\ \pi, (\sin C(\omega T) < 0) \end{cases}$$

(**<u>Σημείωση</u>**: Ενώ συνήθως οι M.F., δηλ. τα φάσματα συχνότητας $\Phi(j\omega) = F\{f(t)\}$ είναι μιγαδικές ποσότητες, εδώ παρατηρούμε ότι ο M.F.του ορθογ. παλμού $\Phi(j\omega) = 2AT \cdot \sin C(\omega T)$, είναι καθαρά πραγματική συνάρτηση ως προς ω και μάλιστα περιττή).

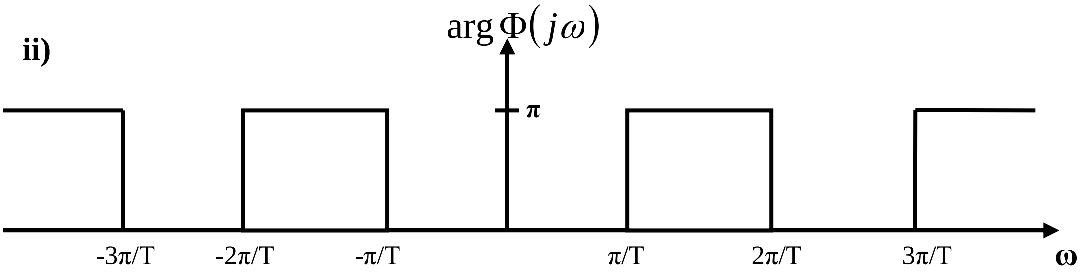
B)

i)



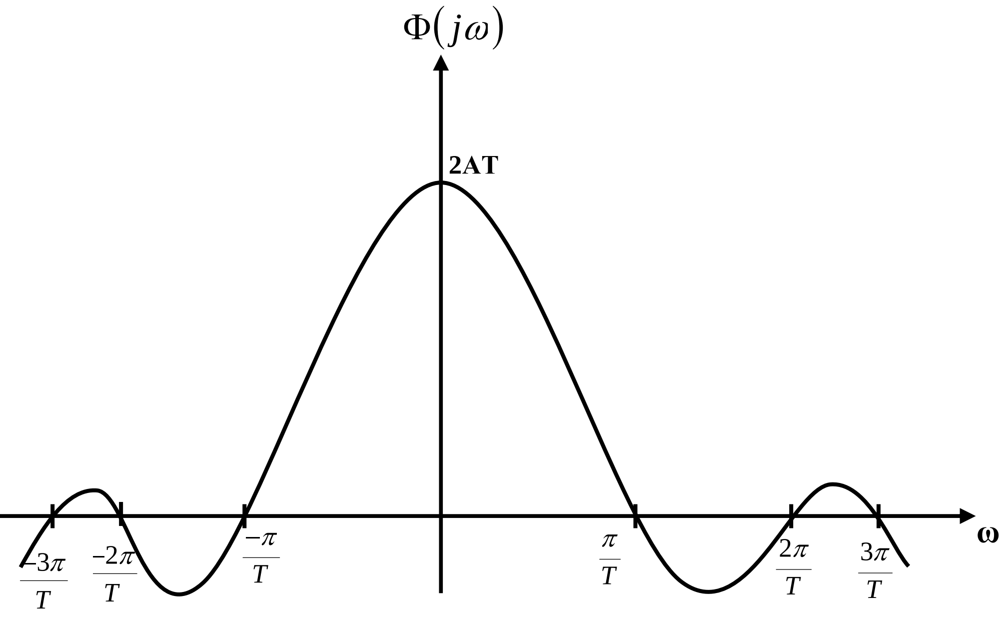
$|\Phi(j\omega)|$
2AT
-3π/T
-2π/T
-π/T
π/T
2π/T
3π/T
ω

ii)



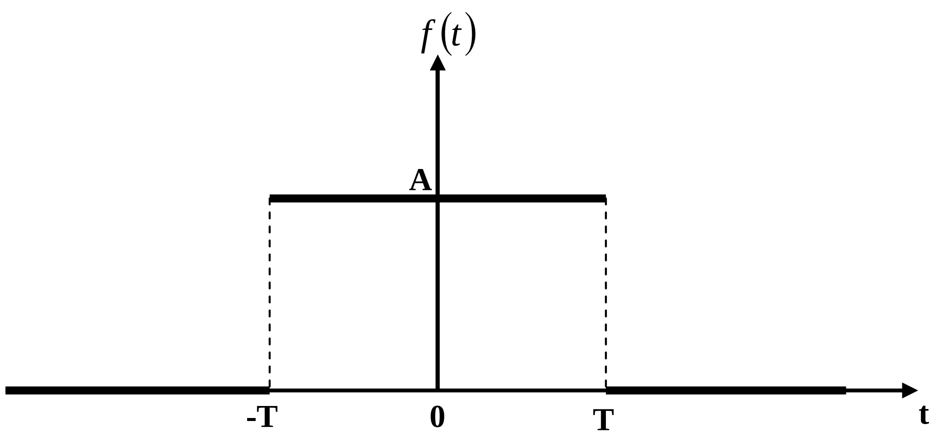
$\arg\Phi(j\omega)$
π
-3π/T
-2π/T
-π/T
π/T
2π/T
3π/T
ω

iii)



$\Phi(j\omega)$
2AT
$\frac{-3\pi}{T}$
$\frac{-2\pi}{T}$
$\frac{-\pi}{T}$
$\frac{\pi}{T}$
$\frac{2\pi}{T}$
$\frac{3\pi}{T}$
ω

iv)



$f(t)$
A
-T
0
T
t

Ιδιότητες Μ. Fourier		
$f(t)=F^{-1}\{\Phi(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$\Phi(\omega)=F\{f(t)\}\xrightarrow{o\rho.}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$	
$C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)$	$C_1\Phi_1(\omega)+C_2\Phi_2(\omega)$	Α
$f(Ct)$	$\frac{1}{\lvert C\rvert}\cdot\Phi\left(\frac{\omega}{C}\right)$	Β
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$	Γ
$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$	Δ
$\frac{d^n f}{dt^n}=f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n\Phi(\omega)$	Ε
$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n\Phi(\omega)}{d\omega^n}$	Ζ
$f_1 * f_2$	$\Phi_1(\omega)\Phi_2(\omega)$	Η
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\{\Phi_1 * \Phi_2\}$	Θ
$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2j}[\Phi(\omega-\omega_0)-\Phi(\omega+\omega_0)]$	Ι
$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[\Phi(\omega+\omega_0)+\Phi(\omega-\omega_0)]$	Κ
$f(t)$, πραγματική - άρτια	$\Phi(\omega)$, πραγματική - άρτια	Λ
$f(t)$, πραγματική - περιττή	$\Phi(\omega)$, φανταστική - περιττή	Μ

Βασικό τυπολόγιο Μ. Fourier		
$f(t)=F^{-1}\{\Phi(\omega)\}$	$F\{f(t)\}=\Phi(\omega)$	
1	$2\pi\delta(\omega)$	1
C	$2\pi C\delta(\omega)$	2
t	$2\pi j\delta'(\omega)$	3
t^n	$2\pi j^{-n}\delta^{(n)}(\omega)$	4
$\frac{1}{t}$	$\pi j-2\pi ju(\omega)$	5
$\frac{1}{t^n}$	$\frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!}[\pi j-2\pi ju(\omega)]$	6
$\delta(t)$	1	7
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	8
$\frac{d\delta(t)}{dt}$	$j\omega$	9
$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n$	10
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	11
$u(t-t_0)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega_0 t}$	12
$tu(t)$	$j\pi\frac{d\delta(\omega)}{d\omega}\frac{1}{\omega^2}$	13
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	14
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	15
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	16
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{j\omega+a}$	17
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$	18
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$	19
$te^{-at}u(t), R\in\{a\}>0$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$	20
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\cdot u(t), R\in\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	21

Τεχνολογικές εφαρμογές του Μετασχηματισμού FOURIER

1)Γενικά: Όπως έχουμε ξαναπεί, ο M.F. παρότι χρησιμοποιείται λιγότερο συχνά από ότι ο M.L., όμως έχει και αυτός ευρύτατες τεχνολογικές εφαρμογές (Ηλεκτρονική Φυσική, Οπτική, Διάδοση Θερμότητας, Κυματική, Θεωρία Σημάτων – Συστημάτων, Φίλτρων, Τηλεπικοινωνιών, κλπ).

Έτσι, ο M.Laplace χρησιμοποιείται συνήθως σε προβλήματα που περιγράφονται από συνήθεις Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις, ν-οστης τάξης, (όπου μάλιστα t>0), ενώ ο Μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται συνήθως σε προβλήματα που εκφράζονται μαθηματικά από Διαφορικές Εξισώσεις (συνήθεις ή με μερικές παραγώγους), όπου η άγνωστη συνάρτηση και οι πρώτες (ν-1) τάξης παράγωγοι της μηδενίζονται όταν $t \to \infty$.

Οι μετασχηματισμοί Laplace και Fourier, όπως είδαμε, σχετίζονται μεταξύ τους και αναφέρονται σε συνεχείς (κυρίως) συναρτήσεις, (ενώ ο Μετασχηματισμός Ζητά, όπως θα δούμε, αφορά στις διακριτές συναρτήσεις).

Τελικά λοιπόν, ο μαθηματικός ορισμός και η εκλογή ενός Μετασχηματισμού, εξαρτάται από το πρόβλημα τις απαιτήσεις και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, αφού ο Μετασχηματισμός δεν είναι παρά το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος.

2. Εφαρμογή του M.F. στα Γραμμικά Χρόνο – αμετάβλητα Συστήματα (LTI)

Ο M.F. βρίσκει ευρεία εφαρμογή (όπως και ο M.L.), σε μια σημαντική κατηγόρια Συστημάτων, αυτή των Γραμμικών Χρόνο – αμετάβλητων Συστημάτων (LTI, Linear Time – Invariant). Σ’αυτά τα Συστήματα, τα σήματα εισόδου και εξόδου, καταλήγουν να περιγράφονται από μια Γραμμική Διαφ. Εξίσωση, με σταθερούς συντελεστές, ν-οστης τάξης.

Ένα από τα κύρια προβλήματα τότε, είναι να προσδιοριστεί η «συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος».

Συγκεκριμένα έχουμε:

α) Έστω ένα Γραμμικό χρόνο – αμετάβλητο (LTI) σύστημα, με σήμα εισόδου $f(t)$ και σήμα εξόδου $g(t)$ και με αντιστοίχους Μετασχηματισμούς Fourier $\Phi(\omega)$ και $G(\omega)$. Ονομάζουμε Συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(\omega)$, τη συνάρτηση $H(\omega)=\dfrac{G(\omega)}{\Phi(\omega)}$, (frequency response), ενώ λέμε κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$, την $h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}$, (impulse response).

Οπότε έχουμε:

$g(t)=F^{-1}\{G(\omega)\}=F^{-1}\{H(\omega)\cdot\Phi(\omega)\}=h(t)*f(t)$, (θεώρημα συνέλιξης), και $h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$.

<u>Συμβολικά:</u>

$$
\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[rr, "h(t)"] \arrow[d, shift right, "F"'] & & g(t) \arrow[d, shift right, "F"'] \\
\Phi(\omega) \arrow[u, shift right, "F^{-1}"'] \arrow[rr] & H(\omega) \arrow[u, "F^{-1}"', shift left, "F"] & G(\omega) \arrow[u, shift right, "F^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

β) Όπως ήδη είπαμε, στα Συστήματα – (LTI), τα σήματα εισόδου και εξόδου, ικανοποιούν μια Γραμμική Διαφορική Εξίσωση, με σταθερούς συντελεστές, ν-οστης τάξης, της μορφής γενικά:

$$\boxed{\sum_{\kappa=o}^{\nu} \alpha_\kappa \frac{d^\kappa y(t)}{dt^\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{\mu} \beta_\kappa \frac{d^\kappa x(t)}{dt^\kappa}, \textbf{ (35)}.}$$

Στο πρόβλημα που συνήθως τότε είναι, να βρεθεί η $H(\omega)$, δηλ. η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, έχουμε 2 κυρίως τρόπους λύσης.

Ο πρώτος τρόπος εύρεσης της $H(\omega)$ στηρίζεται στην εξής ιδιαιτερότητα εδώ: ότι τα σήματα εισόδου $f(t)$ συνήθως μπορούν να εκφράζονται ως μιγαδικές – εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $f(t)=e^{j\omega t}$, οπότε (όπως θα δούμε) τα σήματα εξόδου τότε είναι και αυτά εκθετικής μορφής, τύπου $g(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$ και ακολούθως μέσω της Δ.Ε (35) καταλήγουμε αλγεβρικά να προσδιορίσουμε την $H(\omega)$.

Η δεύτερη μέθοδος εύρεσης της $H(\omega)$, (την οποία θα προκρίνουμε εδώ στις εφαρμογές – εναλλακτικά με την πρώτη μέθοδο), έχει γενικά ως εξής: Θεωρώντας ότι ένα σύστημα – (LTI) περιγράφεται από την Δ.Ε (35), τότε: $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$,
όπου $F\{y(t)\}=Y(\omega)$, $F\{x(t)\}=X(\omega)$ και $F\{h(t)\}=H(\omega)$
δηλ. $X(\omega)$, $Y(\omega)$ και $H(\omega)$ είναι οι M.F. της εισόδου $x(t)$, της εξόδου $y(t)$ και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος $h(t)$ αντίστοιχα. Παίρνοντας τον M.F. της Δ.Ε (35), έχουμε:

$$F\left\{\sum_{\kappa=0}^{\nu} \alpha_\kappa \frac{d^\kappa y(t)}{dt^\kappa}\right\} = F\left\{\sum_{\kappa=0}^{\mu} \beta_\kappa \frac{d^\kappa x(t)}{dt^\kappa}\right\}$$ ή (λόγω Γραμμικότητας του M.F.)

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \alpha_\kappa \cdot F\left\{\frac{d^\kappa y(t)}{dt^\kappa}\right\} = \sum_{\kappa=0}^{\mu} \beta_\kappa \cdot F\left\{\frac{d^\kappa x(t)}{dt^\kappa}\right\}.$$

Οπότε λόγω της διαφορικής ιδιότητας του M.F., δηλ. $F\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n \cdot \Phi(\omega)$, παίρνουμε:

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \alpha_\kappa \cdot (j\omega)^\kappa \cdot Y(\omega) = \sum_{\kappa=0}^{\mu} \beta_\kappa \cdot (j\omega) \cdot X(\omega) \Leftrightarrow Y(\omega) \cdot \left[\sum_{\kappa=0}^{\nu} \alpha_\kappa (j\omega)^\omega\right] = X(\omega) \cdot \left[\sum_{\kappa=0}^{\mu} \beta_\kappa (j\omega)^\kappa\right]$$

οπότε : $\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{\kappa=0}^{\mu} \beta_\kappa (j\omega)^\kappa}{\sum_{\kappa=0}^{\nu} \alpha_\kappa (j\omega)^\kappa}, \textbf{(36)}.}$

<u>Παρατήρηση Ι</u>: Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(\omega)$, όπως δίνεται από την (36),είναι μια κλασματική συνάρτηση πολυώνυμων ως προς $(j\omega)$, όπου: οι συντελεστές του πολυώνυμου του αριθμητή είναι οι συντελεστές του β' μέλους της Δ.Ε. (35), δηλ. του $x(t)$, ενώ οι συντελεστές του παρονομαστή είναι ίδιοι με αυτούς του α' μέλους της (35), δηλ. οι συντελεστές του $y(t)$.

<u>Παρατήρηση ΙΙ</u>: Όπως θα δούμε (και στο επόμενο παράδειγμα 1), ένα σήμα εκθετική – μιγαδικής μορφής στην είσοδο ενός (LTI) – συστήματος, παράγει ένα σήμα εξόδου επίσης εκθετική – μιγαδικής μορφής. Αυτό συμβαίνει, είτε το σήμα εισόδου είναι μια περιοδική συνάρτηση – σήμα (Σειρά Fourier), είτε αν αυτό είναι μια μη περιοδική συνάρτηση – σήμα (ολοκλήρωμα Fourier). Εντούτοις στην πράξη τα σήματα δεν είναι εκθετικής γενικά μορφής, όμως αυτή η ισοδύναμη μαθηματικά εκθετική – μιγαδική έκφραση τους, διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς κατά την μελέτη (ανάλυση – σύνθεση) των Σημάτων – Συστημάτων.

Παραδείγματα – Εφαρμογές του Μ.F

1) Σε ένα σύστημα (LTI), το σήμα εισόδου είναι $f(t)=\kappa \cdot e^{j\omega_0 t}$, (όπου κ σταθερά). Να βρεθεί ότι και το σήμα εξόδου $g(t)$, είναι εκθετικής μορφής.

Λύση:

Έστω $F\{f(t)\}=\Phi(\omega)$ και $F\{g(t)\}=G(\omega)$, οπότε η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι: $H(\omega)=\dfrac{G(\omega)}{\Phi(\omega)}$,. Οπότε :

$$g(t)=F^{-1}\{G(\omega)\}=F^{-1}\{H(\omega)\cdot\Phi(\omega)\}\xrightarrow{(9)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\cdot\Phi(\omega)e^{j\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\cdot F\{f(t)\}\cdot e^{j\omega t}$$ [όμως

$$\boxed{\begin{aligned}&F\{f(t)\}=F\{\kappa\cdot e^{j\omega_0 t}\}=\\&=\kappa\cdot F\{e^{j\omega_0 t}\}\xrightarrow{(32)}\kappa\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)\end{aligned}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\cdot 2\kappa\pi\delta(\omega-\omega_0)\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\kappa\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot\delta(\omega-\omega_0)d\omega=\kappa\cdot H(\omega_0)\cdot e^{j\omega_0 t}$$, (δηλ και το σήμα εξόδου είναι εκθετικής μορφής).

2) Έστω ένα σύστημα – (LTI), που περιγράφεται από τη Διαφορική Εξίσωση: $y'(t)+\alpha\cdot y(t)=x(t)$, (με α>0). Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ του συστήματος, καθώς και η κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$.

Λύση:

Η εν λόγω Δ.Ε. είναι της μορφής (35), όπου (αναλυτικά):
$v=1,\mu=0,\alpha_{\kappa=0}=\alpha,\alpha_{\kappa=1}=1,\beta_{\kappa=0}=1,\beta_{\kappa=1}=0$.
οπότε από τον (36), παίρνουμε:

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\beta_0(j\omega)^0+\beta_1(j\omega)^1}{\alpha_0(j\omega)^0+\alpha_1(j\omega)^1}=\frac{1\cdot 1+0}{\alpha\cdot 1+1\cdot(j\omega)}=\frac{1}{\alpha+j\omega}.$$ Οπότε, από το τυπολόγιο του M.F., όπου $F^{-1}\left\{\dfrac{1}{\alpha+j\omega}\right\}=e^{-at}\cdot u(t)$, παίρνουμε:

$$h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}=e^{-at}\cdot u(t)$$

3) Ένα Γραμμικό χρόνο – αμετάβλητο Σύστημα – (LTI), χαρακτηρίζεται από τη Διαφορική Εξίσωση, $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$.

Να υπολογιστεί η Συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ και η κρουστική απόκριση $h(t)$ του Συστήματος.

Λύση:

Από τη σχέση (36)

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\sum_{\kappa=0}^{\mu}\beta_\kappa(j\omega)^\kappa}{\sum_{\kappa=0}^{\nu}\alpha_\kappa(j\omega)^\kappa}=\frac{1\cdot(j\omega)+2}{1\cdot(j\omega)^2+4\cdot(j\omega)+3}=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}\ \text{(I).}$$

Για να προσδιορίσουμε την κρουστική απόκριση του Συστήματος $h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}$, παίρνουμε τον αντίστροφο M.F. της (I), αφού χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή τεχνική της ανάλυσης μιας κλασματικής συνάρτησης σε απλά κλάσματα. Τέλος, μέσω του τυπολογίου του M.F. βρίσκουμε την $h(t)$. Δηλαδή: $H(\omega)=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$

(αφού για $j\omega=\kappa,\ \kappa^2+4\kappa+3=0\Leftrightarrow\kappa_1=-1,\ \kappa_2=-3$)

Άρα: $\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}=\frac{A}{j\omega+1}+\frac{B}{j\omega+3}\Leftrightarrow j\omega+2\equiv A(j\omega+3)+B(j\omega+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow j\omega+2\equiv Aj\omega+3A+Bj\omega+B\Leftrightarrow j\omega+2\equiv(A+B)(j\omega)+(3A+B)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}A+B=1\\3A+B=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}B=1-A\xleftrightarrow{A=1/2}\boxed{B=\frac{1}{2}}\\3A+1-A=2\Leftrightarrow 2A=1\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$$

Άρα : $H(\omega)=\frac{1/2}{j\omega+1}+\frac{1/2}{j\omega+3}\Leftrightarrow F^{-1}\{H(\omega)\}=h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\cdot u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}\cdot u(t)$

4) Έστω το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος (3) όπου όμως θεωρούμε ότι το σήμα εισόδου είναι $x(t) = e^{-t}u(t)$.
Να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$.

<u>Λύση:</u>

Από τη σχέση (ΙΙ), που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα (3), είναι:
$H(\omega) = \dfrac{j\omega + 2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$,
οπότε : $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega) = \left(\dfrac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{j\omega+1}\right) = \dfrac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2\cdot(j\omega+3)}$
Οπότε, αναλύοντας σε απλά κλάσματα :
$Y(\omega) = \dfrac{A}{j\omega+1} + \dfrac{A_2}{(j\omega+1)^2} + \dfrac{B}{j\omega+3}$ κατά τα γνωστά βρίσκουμε :
$A_1 = \dfrac{1}{4}, A_2 = \dfrac{1}{2}, B = \dfrac{-1}{4}$. Άρα : $Y(\omega) = \dfrac{1/4}{j\omega+1} + \dfrac{1/2}{(j\omega+1)^2} - \dfrac{1/4}{j\omega+3}$, και

$$F^{-1}\{Y(\omega)\} = y(t) = \frac{1}{4}F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+1}\right\} + \frac{1}{2}F^{-1}\left\{\frac{1}{(j\omega+1)^2}\right\} - \frac{1}{4}F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}\cdot u(t) + \frac{1}{2}t\cdot e^{-t}\cdot u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}\cdot u(t) \Leftrightarrow y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}t\cdot e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]\cdot u(t)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1)Να υπολογιστεί ο M.F των συναρτήσεων :

α) $f_1(t) = e^{-2(t-1)} \cdot u(t-1)$

β) $f_2(t) = e^{|t-1|}$

γ)Να σχεδιαστεί το γράφημα των άνω M.L :

2)Να υπολογιστούν οι M.F :

α) $\delta(t+1) + \delta(t-1)$

β) $\dfrac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$

3)Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος όταν :

α) $\mathrm{H}(j\omega) = \dfrac{\left(\sin^2(3\omega)\right) \cdot \cos\omega}{\omega^2}$, και

β) $\mathrm{H}(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 3}$

4)Να βρεθεί ο M.F των σημάτων :

α) $x(t) = t\left(\dfrac{\sin t}{\pi \cdot t}\right)^2$

β) $x(t) = \dfrac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}$

γ) $x(t) = e^{-|t|}$

5) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{H}(\omega)$ και η κρουστική απόκρουση του συστήματος που εκφράζεται από τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις :

α) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$,

β) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot y(t) = u(t)$

γ) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2u(t) + \dfrac{du(t)}{dt}$

6)Να αποδειχθεί ότι :

$F^{-1}\{\pi[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)]\} = \cos(\omega_o t)$.

7) Αν $F\{\sin(\omega_o t)\} = j\pi[\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)]$ τότε:

$F^{-1}\{j\pi[\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)]\} = \sin(\omega_o t)$